
Ghid Bacalaureat Matematică M_tehnologic

Anastase Florică



Logo
Name

Subiectul I

Var.1

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $5(2 + \sqrt{3}) - 5\sqrt{3} = 10$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a știind că $f(1) = a$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x + 1) = \log_2 5$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 5)$ și $B(3, 5)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ = \frac{3}{4}$. |

Var.2

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $(1 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} = 3$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = 3^2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 8. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ și $C(3, 3)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel. |
| 5p | 6. Determinați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $BC = 10$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$. |

Var.3

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 1$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ cu axa Oy . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1} = 9$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ și $C(4, 4)$. Arătați că $AB = BC$. |
| 5p | 6. Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că $AB = 6$ și $BC = 10$. |

Var.4

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Pentru $a = 3$ arătați că $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{5}{6}$. |
| 5p | 2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 5} = 3$. |
| 5p | 4. Prețul unei imprimante este 120 de lei. Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%. |
| 5p | 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,5)$ și $C(6,5)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Calculați $\cos A$ știind că $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și unghiul A este ascuțit. |

Var.5

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real m știind că $f(m) = 1$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 1} = 1$. |
| 5p | 4. În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic. |
| 5p | 6. Arătați că $\operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ = 4$. |

Var.6

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{1}{2} : 0,5 - 1 = 0$. |
| 5p | 2. Calculați $f(-1) + f(0) + f(1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x + 1} = 5$. |
| 5p | 4. Un obiect costă 150 lei. Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 30%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ și $B(3,5)$. Determinați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $AC = 5$ și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$. |

Var.7

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că media geometrică a numerelor $a=16$ și $b=9$ este egală cu 12. |
| 5p | 2. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=0$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+m$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}=3^5$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie multiplu de 2. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. |

Var.8

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = 1$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy , unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 2015$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = 2$. |
| 5p | 4. După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$ și $N(4,1)$. Determinați lungimea segmentului MN . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin x = \frac{4}{5}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{3}{5}$. |

Var.9

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{20}{7} = 2$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = 4$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 15. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin x = \frac{12}{13}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{5}{13}$. |

Var.10

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{10} = 5$. |
| 5p | 2. Calculați $f(-2) + f(2)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 3$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel. |
| 5p | 6. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $AB = 10$ și $AC = 12$. |

Var.11

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 2(5 - \sqrt{5})$ și $b = 2\sqrt{5}$. |
| 5p | 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x-1) - \log_5 3 = 0$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(6,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin(a+b) = \frac{63}{65}$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\sin b = \frac{12}{13}$. |

Var.12

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $1 - \frac{1}{4} : 0,25 = 0$. |
| 5p | 2. Calculați $f(-1) \cdot f(1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-3} = 5$. |
| 5p | 4. Un obiect costă 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(5,4)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , dreptunghic în A , știind că $AC = 6$ și $B = \frac{\pi}{4}$. |

Var.13

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $1 - \frac{1}{2} : 0,5 = 0$. |
| 5p | 2. Arătați că $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 8x + 15 = 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+1} = 6$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, acesta să fie divizibil cu 2. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Calculați lungimea segmentului AB . |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , dreptunghic în A , știind că $BC = 3\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$. |

Var.14

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{12} = 1$. |
| 5p | 2. Arătați că $4(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = 2$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 90 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$ și $B(3,1)$. Calculați lungimea segmentului AB . |
| 5p | 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin x = \frac{3}{5}$. |

Var.15

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{10}{3} = 1$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(1, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 5$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 30. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ și $B(7,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB . |
| 5p | 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$. |

Var.16

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{4} = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Calculați $f(-1) + f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+4} = 4$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 3. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,5)$ și $B(5,0)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel. |
| 5p | 6. Calculați aria triunghiului ABC , dreptunghic în A cu $AB = 4$ și $AC = 3$. |

Var.17

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. |
| 5p | 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x-1) = 2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie divizor al lui 1000. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului AOB . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin x = \frac{3}{5}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{4}{5}$. |

Var.18

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \frac{7}{6} = 2$. |
| 5p | 2. Arătați că $(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 = 1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 5x + 4 = 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-5} = 2$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 25%, prețul unui televizor este 600 de lei. Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $M(8,6)$. Calculați distanța dintre punctele O și M . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2 135^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$. |

Var.19

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2} = 3$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Calculați $f(-1) \cdot f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2} = 9$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, acesta să fie multiplu de 2. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,-1)$. Arătați că $AO = OB$. |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$. |

Var.20

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{8}{15} = 2$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice egalitatea $(n-2)(n-4) = 0$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,3)$, $N(4,3)$ și $P(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului MNP . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2 120^\circ - \cos^2 30^\circ = 0$. |

Var.21

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - x + a = 0$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1 x_2 - 1 < 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = 9^x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$ și $B(4,4)$. Demonstrați că punctele A , O și B sunt coliniare. |
| 5p | 6. Demonstrați că $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x . |

Var.22

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})=0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Determinați numerele reale a , știind că $f(a)=a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7x-5}=4^x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice relația $2^n \leq 16$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului MQ , unde Q este mijlocul segmentului NP . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \cos 60^\circ - \cos 45^\circ = 0$. |

Var.23

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+0,5)=\frac{3}{4}$. |
| 5p | 2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=1-3x$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+5)=\log_3 9$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 30%, prețul unui obiect este 700 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ și $B(8,0)$. Determinați lungimea medianei din vârful O în triunghiul AOB . |
| 5p | 6. Arătați că $\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ - (\sin 30^\circ + \cos 60^\circ) = 0$. |

Var.24

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = 3$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)+f(a+1)=5$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-4}=25$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,1)$ și $B(2,5)$. Calculați lungimea segmentului OM , unde M este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Arătați că $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$. |

Var.25

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$. Arătați că $f(-2) + f(2) = 4f(0)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(x^2 - 27) = \log_8(x - 3)^2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, acesta să fie număr par. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 3)$ și $B(8, 3)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că punctul B este mijlocul segmentului AC . |
| 5p | 6. Arătați că $\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ - 2 \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = 0$. |

Var.26

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că numărul $N = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$. |
| 5p | 2. Determinați numerele reale a , știind că punctul $A(a, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x^2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{x+1} = 30$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$, acesta să fie număr natural. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 5)$, $B(3, 5)$ și $C(2, 1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Demonstrați că $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x . |

Var.27

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{6} = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 5) = \lg 9$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 270 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$ și $B(3, 5)$. Calculați distanța de la punctul $O(0, 0)$ la mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\operatorname{tg} x = 1$. |

Var.28

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $3(2 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = 6$. |
| 5p | 2. Calculați $f(0) \cdot f(2)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-2} = 25$. |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(1,3)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Calculați $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ$. |

Var.29

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Determinați numărul real m din egalitatea $m + 2^3 = \sqrt{16} - 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x) = 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x = 2^{x-2}$. |
| 5p | 4. O firmă folosește pentru publicitate 3000 de lei, ceea ce reprezintă 5% din profitul anual. Determinați profitul anual al firmei. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $x - 2y + 1 = 0$. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 2)$ aparține dreptei d . |
| 5p | 6. În triunghiul ABC dreptunghic în A , $AB = 3$ și $AC = 4$. Determinați $\sin B$. |

Var.30

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 3$ și $b = \sqrt{25}$. |
| 5p | 2. Calculați $(f \circ g)(-2)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 5$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 4} = 2\sqrt{3}$. |
| 5p | 4. Determinați numărul elementelor care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10, din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$. |
| 5p | 5. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(3, m-1)$ este situat pe dreapta de ecuație $x + y - 3 = 0$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 5$ și $BC = 6$. Calculați $\cos B$. |

Var.31

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $b_2 = 8$. Calculați $b_1 + b_2 + b_3$. |
| 5p | 2. Determinați numerele reale a pentru care $f(a-5) = f(5)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 2^x = 4^{x-2}$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre se pot forma cu cifrele din mulțimea $A = \{0, 2, 4, 5\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -2)$ și $B(-1, 4)$. Determinați coordonatele punctului M , știind că $\overline{AM} = \overline{MB}$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle ABC) = 30^\circ$, $AB = 8$ și $BC = 12$. Calculați aria triunghiului ABC . |

Var.32

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = a_3 - 6$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(1, 3)$ este situat pe graficul funcției f . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x+2} = 10$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 15%, prețul unui stilou este de 17 lei. Calculați prețul stiloului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = -x + 3$. Determinați numărul real a , știind că dreapta d' de ecuație $y = ax - 5$ este perpendiculară pe dreapta d . |
| 5p | 6. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $m(\angle A) = 90^\circ$, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ și $AC = 15$. |

Var.33

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că numărul $3(4 + \sqrt{3}) - \sqrt{27}$ este natural. |
| 5p | 2. Calculați $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2 + 8) = \log_7(6x)$. |
| 5p | 4. După o scumpire cu 30%, prețul unui obiect este 325 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(1, 3)$ și $R(3, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q , știind că R este mijlocul segmentului PQ . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin 10^\circ + \sin 30^\circ - \sin 170^\circ = \frac{1}{2}$. |

Var.34

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $3(2 + \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} = 6$. |
| 5p | 2. Calculați $f(-2) \cdot f(0)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 1) = \log_3 1$. |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 10%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,1)$ și $R(2,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR . |
| 5p | 6. Calculați $\cos B$, știind că $\sin B = \frac{5}{13}$ și unghiul B este ascuțit. |

Var.35

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x + 2)^2 = 4$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3mx + 1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x} = 9$. |
| 5p | 4. Calculați $5C_4^2 - A_5^2$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ și $B(2,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB) . |
| 5p | 6. Calculați lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB = 4$ și $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$. |

Var.36

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $3(2 - \sqrt{20}) + \sqrt{180} = 6$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Calculați $(f \circ f)(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(5x - 1) = \lg 2 + \lg 7$. |
| 5p | 4. După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(4,8)$ și $C(4,0)$. Calculați distanța de la punctul B la dreapta AC . |
| 5p | 6. Arătați că $\frac{2 \cos 30^\circ}{2 \operatorname{tg} 45^\circ + 1} = \operatorname{tg} 30^\circ$. |

Var.37

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\sqrt{11}(\sqrt{11}+1) - (\sqrt{11}+3) = 8$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 2} = 3\sqrt{3}$. |
| 5p | 4. Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1, 2)$ și $N(2, 1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului M față de punctul N . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 9$ și $AC = 3\sqrt{5}$. Calculați măsura unghiului B . |

Var.38

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\left(5 + \frac{1}{2}\right)\left(5 - \frac{1}{2}\right) = \frac{99}{4}$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 8 - x$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 1) = 2$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 10%, prețul unei tablete este 630 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$ și $B(3, 5)$. Calculați lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Arătați că $\cos^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$. |

Var.39

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + m = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 = 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x + 1} = 3x + 1$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 25%, prețul unui obiect este 750 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 2)$ și $B(8, 6)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $OABC$ este paralelogram. |
| 5p | 6. Arătați că $\sqrt{3} \cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cos 90^\circ = 2$. |

Var.40

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(3 - 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{14} = 1$. |
| 5p | 2. Determinați numerele reale m , știind că punctul $A(m, 6)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{14-x} = \sqrt{3x+6}$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $n(n-10)(n-11) \leq 0$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$ și $C(3, 7)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin 30^\circ \cos 30^\circ + 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 1$. |

Var.41

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_3 = 12$ și rația $q = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \geq f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+1) = \log_5(11-x)$. |
| 5p | 4. Calculați $C_{11}^9 - C_{11}^2$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(1, 0)$ și $C(5, 4)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel. |
| 5p | 6. Arătați că $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$. |

Var.42

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_3 = 12$ și rația $q = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \geq f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+1) = \log_5(11-x)$. |
| 5p | 4. Calculați $C_{11}^9 - C_{11}^2$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(1, 0)$ și $C(5, 4)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel. |
| 5p | 6. Arătați că $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$. |

Var.43

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = 0$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 3$ conține punctul $A(2, 5)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4} - 2 = x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, -2)$. Determinați numărul real a , știind că punctele A , B și $C(4, a)$ sunt coliniare. |
| 5p | 6. Diagonala pătratului $MNPQ$ are lungimea de $6\sqrt{2}$. Calculați perimetrul acestui pătrat. |

Var.44

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $1,75 : 0,25 - 2\left(\frac{17}{4} - 2,25\right) = 3$. |
| 5p | 2. Determinați imaginea funcției $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x + 4) = 4$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs este de 144 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$ și $B(5, 0)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a , știind că segmentul AB are lungimea egală cu 5. |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$. |

Var.45

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_4 = 11$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+2} - 2 = 0$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 5)$ și $B(3, 1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 6$ și $BC = 10$. Calculați $\cos B$. |

Var.46

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Arătați că $2,5 : 0,5 - 5\left(6,5 - \frac{11}{2}\right) = 0$. |
| 5p | 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + mx + 1 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + \sqrt{x-2} = 3$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,6)$, $B(4,6)$ și $C(-4,0)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Calculați $\cos A$, știind că A este unghi ascuțit astfel încât $\sin A = \frac{4}{5}$. |

Var.47

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{1}{2} : 0,5 - \frac{1}{4} : 0,25 = 0$. |
| 5p | 2. Calculați $f(-1) \cdot f(1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2} = 5$. |
| 5p | 4. Un obiect costă 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(6,3)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $AC = 4$ și $B = \frac{\pi}{4}$. |

Var.48

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} : 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$. |
| 5p | 2. Arătați că $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+1} = 6$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Determinați lungimea înălțimii din vârful O al triunghiului AOB . |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $BC = 5\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$. |

Var.49

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{2} - 2^2 = 0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + a^2$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a , pentru care $f(1) = 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+1} = 3^4$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,7)$. Determinați coordonatele simetricului punctului B față de punctul A . |
| 5p | 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. |

Var.50

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{16} + \sqrt[3]{-8} = 0$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(4, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+1} = 5$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 6. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ și $B(7,5)$. Determinați lungimea segmentului OM , unde punctul M este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$. |

Subiectul II

Var.1

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x știind că $B + C = A$. |
| 5p | c) Arătați că $B \cdot B + B = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$. |
| 5p | a) Arătați că $0 \circ (-4) = -4$. |
| 5p | b) Arătați că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$. |

Var.2

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg. |
| 5p | a) Arătați că $\det B = -5$. |
| 5p | b) Arătați că $\det A \neq 0$ pentru orice număr întreg a . |
| 5p | c) Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 5 = 5$. |
| 5p | b) Arătați că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$. |

Var.3

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $A \cdot A = 5A$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A + \begin{pmatrix} x & y \\ y & -3 \end{pmatrix} = I_2$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy$. |
| 5p | a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$. |
| 5p | b) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 1) \circ (x - 3) = 4$. |

Var.4

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde b este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -2$. |
| 5p | b) Determinați numărul real b pentru care $A + B = AB + C$. |
| 5p | c) Arătați că $\det(B + 2C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real b . |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = 0$. |
| 5p | b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin $X - 1$. |
| 5p | c) Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = -2$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

Var.5

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -1$. |
| 5p | b) Arătați că $2A \cdot B - B \cdot A = I_2$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x știind că $A \cdot A - xA = I_2$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x + y - 1) - xy$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 2 = 2$. |
| 5p | b) Arătați că $x * 2 = 2 * x = 2$ pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$. |

Var.6

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det M = 4$. |
| 5p | b) Arătați că $M \cdot M + 3M + 4I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale a și b astfel încât $M \cdot M \cdot M = aM + bI_2$. |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 5X - 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $f(a) + f(-a) + 2 \leq 0$, pentru orice număr real a . |
| 5p | c) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

Var.7

SUBIECTUL al II-lea

(30 de punct

- | | |
|---|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $C(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -5$. |
| 5p | b) Arătați că $\det(A + C(-1)) = \det B$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $C(x) \cdot A - A \cdot C(x) = B$. |
| 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 6X + 3$. | |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = 0$. |
| 5p | b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X - 3$. |
| 5p | c) Demonstrați că $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

Var.8

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|---|---|
| | 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A = xA$. |
| 5p | c) Arătați că $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = 2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$. | |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = -2$. |
| 5p | b) Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} = a(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

Var.9

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|---|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -2$. |
| 5p | b) Arătați că $A + B = 5C$. |
| 5p | c) Demonstrați că $AB + BA + 4I_2 = 25C$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$. | |
| 5p | a) Arătați că $5 \circ (-4) = -4$. |
| 5p | b) Arătați că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$. |

Var.10

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 1$. |
| 5p | b) Arătați că $A \cdot A + I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a . |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$. |
| 5p | a) Arătați că $f(-5) = 0$. |
| 5p | b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1 x_2} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_1}{x_2 x_3} = -\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

Var.11

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Calculați $\det A$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale p pentru care $A \cdot A = pA$. |
| 5p | c) Determinați matricele $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, știind că $\det(A + B) = 0$, unde b este un număr real. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție dată de $x \circ y = -xy + x + y$. |
| 5p | a) Calculați $1 \circ 2015$. |
| 5p | b) Arătați că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x \circ 5^x = 1$. |

Var.12

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -4$. |
| 5p | b) Arătați că $\det(A - 2B) = 0$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale x și y , pentru care $A \cdot B = B \cdot A$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $1 \circ (-2) = -2$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale nenule x , pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$. |

Var.13

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det A = -4$.
- 5p b) Arătați că $\det(A - 2B) = 0$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x și y , pentru care $A \cdot B = B \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ (-2) = -2$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale nenule x , pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$.

Var.14

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -5$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot B = B \cdot A$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numărul real x , pentru care $A \cdot A - 3(A + B) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $1 * (-3) = -3$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{3}(x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale nenule x , pentru care $x * \frac{1}{x} = -3$.

Var.15

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Arătați că $B \cdot B + A = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numerele reale x și y , pentru care $A + B = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 4^y \end{pmatrix}$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.
- 5p a) Arătați că $f(1) = -2$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.
- 5p c) Demonstrați că $(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = -3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Var.16

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Verificați dacă $A \cdot (A + I_2) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care $\det B = 0$, unde $B = A \cdot A + mI_2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 4X + 4$.
- 5p a) Arătați că $f(-1) = 0$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X + 2$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -\frac{3}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Var.17

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = 5$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $B \cdot B = 2B$.
- 5p c) Arătați că $\det(A \cdot B - B \cdot A) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 3 = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x , pentru care $(x \circ x) \circ x = 3$.

Var.18

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 2$.
- 5p b) Arătați că $(A + B)(B - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A \cdot X = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 3$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 0$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x^2) * x = -1$.
- 5p c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n * n * n * n < 3$.

Var.19

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -8$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A - 2A = 8I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Demonstrați că $\det(A \cdot B - B \cdot A) \geq 0$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 + 3X^2 - X - 2$.
- 5p a) Arătați că $f(1) = 2$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.
- 5p c) Determinați rădăcinile polinomului f .

Var.20

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -13$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B \cdot B - xI_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - X - 3$.
- 5p a) Arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 2$.
- 5p c) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Var.21

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 16$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B = aI_2$.
- 5p c) Demonstrați că $\det\left(xA + \frac{1}{x}B\right) \geq 49$, pentru orice număr real nenul x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + 15(x + y) + 42$.
- 5p a) Arătați că $(-2) \circ (-2) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 5(x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x , pentru care $(x - 3) \circ (x - 3) \circ (x - 3) = 197$.

Var.22

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(2)) = 5$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x) \cdot A(y) = 3I_2$. |
| 5p | c) Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - (x + y) + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $2 * 2 = 2$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2018$. |

Var.23

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 5$. |
| 5p | b) Arătați că, dacă $A + B(x) = 3I_2$, atunci $A \cdot B(x) = 5I_2$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x) \cdot B(x) - I_2) = 0$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 9(x + y) + 90$. |
| 5p | a) Arătați că $10 \circ 8 = 8$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = (x - 9)(y - 9) + 9$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ n \leq 10$. |

Var.24

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 36$. |
| 5p | b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x) \cdot M(y) = A$. |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 6$, unde m este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = m - 5$, pentru orice număr real m . |
| 5p | b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |
| 5p | c) Pentru $m = -7$, determinați numerele reale p și q , pentru care $f = (X + 1)(X^2 + pX + q)$. |

Var.25

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det M = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot A(a) = 4A(a) - I_2$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\det(aA(a) + M) = 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(2) = 2m - 6$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , numărul $E = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$ este întreg, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = 3$, determinați rădăcinile polinomului f .

Var.26

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1, 1)) = 2$.
- 5p b) Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1, 0) + A(n+1, 0) = A(2018, 0)$.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că există un număr real x pentru care $A(x, 1) \cdot A(x, 1) = A(a, -2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 7X^2 + mX - 8$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(-1) + f(1) = -30$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 3X + 1$, știind că f se divide cu $X - 2$.
- 5p c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

Var.27

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det A$.
- 5p b) Arătați că $9(A + B) - (A \cdot B + B \cdot A) = 45I_2$.
- 5p c) Determinați numerele reale x , pentru care $\det(A + xI_2) = 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 6X + 8$.
- 5p a) Arătați că $f(2) = -8$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
- 5p c) Demonstrați că $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 = 30$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Var.28

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) = M(0)$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $\det(M(a)) = 0$.
- 5p c) Determinați matricea $M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$.
- 5p a) Arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$.
- 5p c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Var.29

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră determinanții $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ și $D(a) = \begin{vmatrix} 4-a & a-1 \\ a+1 & 4-a \end{vmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $d = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $D(a) = 1$.
- 5p c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,4)$ și $C(3,m)$. Determinați numerele reale m știind că $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$.
2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Calculați $A(2) + A(-2)$.
- 5p b) Determinați numerele reale p și q pentru care $A(2) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Arătați că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr întreg x .

Var.30

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră determinantul $D(m) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix}$, unde m este număr real.
5p	a) Calculați $D(0)$.
5p	b) Arătați că $D(m) = (m+2)(m+3)$, pentru orice număr real m .
5p	c) Determinați numerele naturale n pentru care $D(n^2 - 3n) = 0$.
	2. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $A(-1) + A(1) = 2A(0)$.
5p	b) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 5I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1) \cdot X = 4A(2)$.

Var.31

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră determinantul $d(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.
5p	a) Calculați $d(0)$.
5p	b) Demonstrați că $d(x) = -2(x-1)(x+1)$, pentru orice număr real x .
5p	c) Arătați că, dacă x și y sunt două numere reale diferite astfel încât $d(x) = d(y)$, atunci $x + y = 0$.
	2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Calculați $A + I_2$.
5p	b) Arătați că inversa matricei $M = A + I_2 + A \cdot A$ este matricea $-A$.
5p	c) Determinați numărul real x , pentru care avem $(A + I_2)(B + I_2) = 2I_2$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Var.32

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a+1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $D(0) = -12$.
5p	b) Determinați numerele reale a pentru care $D(a) = a^2$.
5p	c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(n+1,n)$, unde n este număr natural și $C(1,3)$. Determinați numerele naturale n , știind că punctele A , B și C sunt vârfurile unui triunghi care are aria egală cu 1.
	2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	a) Arătați că $A(0) + A(2) = 2A(1)$.
5p	b) Demonstrați că $A(1) \cdot A(x) + 3A(1) = O_2$, pentru orice număr real x , unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $B = I_2 + aA(1)$ este inversabilă, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Var.33

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	a) Calculați $\det A$.
5p	b) Arătați că $B \cdot A - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
5p	c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A + xB) = 0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.
5p	a) Arătați că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, pentru orice număr real x .
5p	b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.
5p	c) Calculați $1 \circ 2 \circ \dots \circ 2014$.

Var.34

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) | Calculați $\det A$. |
| 5p | b) | Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A - xI_2 = A$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) | Determinați matricele $M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$, știind că $\det(M + A) = 0$, unde m este număr real. |
| | | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x * y = x + y - 2$. |
| 5p | a) | Calculați $5 * (-5)$. |
| 5p | b) | Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă. |
| 5p | c) | Calculați $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$. |

Var.35

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | | 1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$. |
| 5p | a) | Calculați $\Delta(1)$. |
| 5p | b) | Arătați că $\Delta(x) = 6(x^2 - 1)$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) | Determinați inversa matricei $A(0)$. |
| | | 2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$. |
| 5p | a) | Calculați $a + b$, știind că $f(1) = 0$. |
| 5p | b) | Pentru $a = -1$ și $b = 1$, determinați rădăcinile polinomului f . |
| 5p | c) | Determinați numerele reale a și b , știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f . |

Var.36

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(10)) = 10$.
- 5p b) Demonstrați că $(A(a) - A(b))(A(a) - A(b)) = 3(a-b)(A(a) - A(b))$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(2)) + \det(A(3)) + \dots + \det(A(n)) = 35$.
2. Pe mulțimea $M = [\sqrt{2}, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2)} + 2$.
- 5p a) Arătați că $4 * \sqrt{3} = 4$.
- 5p b) Determinați simetricul elementului $x = \sqrt{6}$, în raport cu legea de compoziție „*”.
- 5p c) Calculați $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020}$.

Var.37

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ -5a & 1+4a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -5$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a + b - 6ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n , pentru care $A(m) \cdot A(n) = A(6 - 5mn)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.
- 5p a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele numere reale x pentru care $x * x * x = x$.

Var.38

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 2 \\ 2 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det M = 4$.
- 5p b) Arătați că $A(a) \cdot A(-a) + a^2 \cdot I_2 = M$, pentru orice număr real a , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $M \cdot X = A(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 10$.
- 5p a) Arătați că $5 * 5 = 0$.
- 5p b) Determinați numerele naturale n pentru care $n^2 * n < -4$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x^2 - 18$.

Var.39

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = 2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X \cdot M(1) = M(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4xy + 4x + 4y + 3$.
- 5p a) Arătați că $1 * (-1) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = 4(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $x * \frac{1}{4} * (-x) = 19$.

Var.40

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -5$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = 10 \cdot I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2x + y - 3xy$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = -2$.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * (x-1) = -1$.
- 5p c) Dați exemplu de două numere iraționale a și b pentru care $a * b \in \mathbb{N}$.

Var.41

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A = A$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot X = I_2 + 3A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.
- 5p a) Arătați că $2 * 2020 = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 13$.

Var.42

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A = A$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot X = I_2 + 3A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.
- 5p a) Arătați că $2 * 2020 = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 13$.

Var.43

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A - B) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $C = A \cdot A + B \cdot B$ nu este inversabilă.
- 5p c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot X = X \cdot B$, unde $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy + 1}{x + y}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Determinați numărul $x \in M$ pentru care $x * 2 = \frac{3}{2}$.
- 5p c) Calculați $\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10$.

Var.44

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A + A = O_2$.
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X = \det(X + I_2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = -xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ \sqrt{2} = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $3^x \circ 5^x = 1$.

Var.45

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A + I_2) = 5$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A = 4A$.
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A \cdot X = X \cdot A$.
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy + x + y - 1}{2}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 2$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x * x \leq 1$.
- 5p c) Calculați $(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020$.

Var.46

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A + I_3) = 4$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A + A = 2A \cdot A$.
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x) = A + xI_3$ este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + ay + 1$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $2020 * 0 = 2021$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Pentru $a = -1$, determinați numărul real x pentru care $4^x * 2^x = 1$.

Var.47

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | <p>1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.</p> |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -4$. |
| 5p | b) Arătați că $\det(A - 2B(x, y)) = 0$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot B(x, y) = B(x, y) \cdot A$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2(x + y) + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $2020 \circ (-2) = -2$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x} \circ x = x$. |

Var.48

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | <p>1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.</p> |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 1$. |
| 5p | b) Arătați că $2A - A \cdot A = I_2$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x , y și z , pentru care $A \cdot \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - I_2 = O_2$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x^2 + y^2 - 1$. |
| 5p | a) Arătați că $1 \circ (0 \circ 2) = 12$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (-x) = 3$. |
| 5p | c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m \circ n = -mn$. |

Var.49

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | <p>1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = B + xI_2$, unde x este număr real.</p> |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -5$. |
| 5p | b) Arătați că $A \cdot M(x) = M(x) \cdot A$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A - 3(A + M(x)) = I_2$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y$. |
| 5p | a) Arătați că $2020 * (-3) = -3$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $(6 * x) * 6 = 6$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{1}{x} = -3$. |

Var.50

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|-----------|-----------|--|
| | 1. | Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) | Arătați că $\det A = 1$. |
| 5p | b) | Arătați că $B \cdot B + A = O_2$. |
| 5p | c) | Determinați $x, y \in (0, +\infty)$, pentru care $A \cdot B + B \cdot A - (A + B) = \begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}$. |
| | 2. | Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + \frac{y}{5} + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $2020 * 5 = 2022$. |
| 5p | b) | Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = \frac{24}{5}$. |
| 5p | c) | Determinați numărul real x pentru care $5^x * 5^{x+1} = 11$. |

Subiectul III

Var.1

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | 1. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{4}$. |
| 5p | c) | Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f . |
| | 2. | Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_0^1 e^x dx = e - 1$. |
| 5p | b) | Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) | Calculați $\int_0^1 F(x) dx$. |

Var.2

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | 1. | Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$. |
| 5p | c) | Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f . |
| | 2. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$. |
| 5p | b) | Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) | Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria mai mică strict decât 4. |

Var.3

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | 1. | Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. |
| 5p | a) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. |
| 5p | b) | Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$. |
| 5p | c) | Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției f . |
| | 2. | Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_{-1}^1 (2x+1)dx = 2$. |
| 5p | b) | Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x - 1$. |
| 5p | c) | Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$. |

Var.4

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | 1. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. |
| 5p | a) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. |
| 5p | b) | Arătați că $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | c) | Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| | 2. | Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. |
| 5p | b) | Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$. |
| 5p | c) | Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-1, +\infty)$. |

Var.5

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$. |
| 5p | a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$. |
| 5p | b) Arătați că $f'(x) = e^x + f(x)$ pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 0$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 3x^2 dx = 7$. |
| 5p | b) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 2014$. |
| 5p | c) Determinați numărul natural n , $n \geq 2$ știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \frac{13}{2}$. |

Var.6

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 6(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $f(2012) + f(2014) \leq f(2013) + f(2015)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 4) dx = \frac{1}{3}$. |
| 5p | b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x} dx = 12$. |

Var.7

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x}$. |
| 5p | c) Arătați că $-1 \leq f(x) \leq 3$, pentru orice $x \in [-1, 1]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = 5$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x$. |

Var.8

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2) dx = \frac{1}{3}$. |
| 5p | b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3) = 5$. |
| 5p | c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$, are aria egală cu $3e - 4$. |

Var.9

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 2x^3}$. |
| 5p | c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f . |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x^2) dx = 15$. |
| 5p | b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2015$. |
| 5p | c) Determinați numărul natural n , $n > 1$, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2} dx = 9$. |

Var.10

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \sqrt{x}) dx = \frac{26}{3}$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2015$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x) - \sqrt{x})e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$. |

Var.11

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) | Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. |
| 5p | b) | Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | c) | Determinați intervalele de monotonie ale funcției f . |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x$. |
| 5p | a) | Calculați $\int_{-1}^1 x^5 dx$. |
| 5p | b) | Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^5) e^x dx = 1$. |
| 5p | c) | Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^3}$. |

Var.12

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = 3$. |
| 5p | c) | Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y = 4x + 1$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + 2x$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x) dx = 0$. |
| 5p | b) | Arătați că $\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 + 1) dx = 3e^2 + 1$. |
| 5p | c) | Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$. |

Var.13

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 6x(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-11}{x-2} = 12$. |
| 5p | c) | Demonstrați că $f(x) \geq 6$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 3x) dx = \frac{2}{3}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2) e^x dx = 3$. |
| 5p | c) | Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{3f(x)}{x}$. |

Var.14

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3x}{x} = 0$. |
| 5p | c) | Demonstrați că $f(x) \geq -2$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x - 1) dx = \frac{1}{5}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\int_1^e (f(x) - x^4 - 1) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$. |
| 5p | c) | Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$. |

Var.15

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -9$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f(x) \leq 4$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 2) dx = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 e^x f(x) dx = 2e - 1$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a , știind că $\int_0^a f(x) dx = \int_0^{6-a} (f(x) - 4) dx$. |

Var.16

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Arătați că $-16 \leq f(x) \leq 16$, pentru orice $x \in [-2, 2]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x^2 - 1) dx = 1$. |
| 5p | b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$. |
| 5p | c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. |

Var.17

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x + 2$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 3(x^2 + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x+2} = 3$. |
| 5p | c) | Demonstrați că $-5 \leq f(x) \leq 9$, pentru orice $x \in [-1, 1]$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - x$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_0^1 (f(x) + x) dx = 1$. |
| 5p | b) | Arătați că $\int_0^1 (4x^3 - f(x)) e^x dx = 1$. |
| 5p | c) | Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 3$. |

Var.18

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|--|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = (x+1)(3x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x f'(x)} = \frac{1}{3}$. |
| 5p | c) | Demonstrați că $f(x) \geq -\frac{4}{27}$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 1) dx = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) | Demonstrați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2017$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) | Determinați numărul natural n , știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$ are aria egală cu $n^2 - \frac{7}{3}$. |

Var.19

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|---|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 12$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{f(x) - x^4} = -\frac{1}{2}$. |
| 5p | c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f . |
| 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$. | |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 2x + 4) dx = 7$. |
| 5p | b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2017$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x) dx = a^3 - 2$. |

Var.20

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|--|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 6(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$. |
| 5p | c) Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 8$, pentru orice $x \in [-1, 1]$. |
| 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x$. | |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 5x) dx = \frac{1}{3}$. |
| 5p | b) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2017$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{127\pi}{3}$. |

Var.21

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. |
| 5p | c) Demonstrați că $-e \leq f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 1) dx = 2$. |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. |
| 5p | c) Calculați $\int_1^e f(x) \ln x dx$. |

Var.22

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $1 \leq f(x) + f(y) \leq 3$, pentru orice numere reale x și y . |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3) dx = 9$. |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x) + 12} dx = \frac{\pi}{8}$. |

Var.23

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-1 \leq f(x) + f(y) \leq \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{1}{e^x} \right) dx = 0$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- 5p c) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

Var.24

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3x(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \geq -1$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x \in (-\infty, 1] \\ 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$.
- 5p b) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x) dx = \frac{n^2 - 4 + \ln^2 2}{2}$.

Var.25

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = (3x-1)(7x-1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f(x) \leq \frac{52}{49}$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x - 2, & x \in (-\infty, 0] \\ x - 2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 f(x) dx = -\frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$. |
| 5p | c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$. |

Var.26

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 0$. |
| 5p | b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{97\pi}{10}$. |
| 5p | c) Determinați numărul $m \in (1, +\infty)$, știind că $\int_1^m (f(x) - x^2) \ln x dx = \frac{1}{2}$. |

Var.27

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - f(x)}{f'(x)}$.
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + 2x) dx = \frac{2}{3}$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 e^x (x^2 - f(x)) dx$.
- 5p c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{2}{3}$.

Var.28

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$.
- 5p a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y = \frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$.
- 5p a) Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$.
- 5p b) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + \ln x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

Var.29

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$. |
| 5p | c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 2 \\ x^2 - 4x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$. |
| 5p | a) Calculați $f(1) \cdot f(3)$. |
| 5p | b) Arătați că funcția f este continuă în punctul $x = 2$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f(a) \cdot f(b) < 0$, pentru orice $a < 2$ și $b > 2$. |

Var.30

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$. |
| 5p | a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} ((x-2)f(x))$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$. |
| 5p | a) Calculați $f(0) + f(2)$. |
| 5p | b) Arătați că funcția f este continuă în $x = 1$. |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 0$. |

Var.31

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}{x + 2}$. |
| 5p | a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f . |
| 5p | c) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f . |
| | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 - x^3, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$. |
| 5p | a) Calculați $f(-1) + f(1)$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x = 0$. |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \geq 0$. |

Var.32

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x - 1)f(x))$. |
| 5p | c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ \sqrt{3x + 1}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$. |
| 5p | a) Arătați că $f(-2) \cdot f(5) = -28$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x = 0$. |
| 5p | c) Arătați că, dacă p și q sunt numere reale astfel încât $(p + 1) \cdot (q + 1) < 0$, atunci $f(p) \cdot f(q) < 0$. |

Var.33

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|-----------|-----------|--|
| | 1. | Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. |
| 5p | a) | Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) | Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. |
| | 2. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) | Calculați $\int_1^2 (3 - f(x)) dx$. |
| 5p | b) | Determinați primitiva $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 3$. |
| 5p | c) | Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$. |

Var.34

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|-----------|-----------|---|
| | 1. | Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = (x+1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Verificați dacă $f''(x) + f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | c) | Arătați că funcția f are un punct de extrem. |
| | 2. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) | Calculați $\int_4^5 xf'(x) dx$. |
| 5p | b) | Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 4 + \ln x$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) | Determinați numărul real a , $a > 5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = 5$ și $x = a$, este egală cu $\ln 3$. |

Var.35

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 1.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p a)** Verificați dacă $f'(x) = 1 + \ln x$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- 5p c)** Demonstrați că $f(x) \geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 2.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.
- 5p a)** Verificați dacă funcția $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p b)** Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2) dx$.
- 5p c)** Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2}$.

Var.36

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 1.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 1)$.
- 5p a)** Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \frac{1}{e}$ situat pe graficul funcției f .
- 5p c)** Demonstrați că $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{3x - 1}{x + 1}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b)** Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.
- 5p c)** Arătați că $\int_{-1}^0 e^x f(x) dx = \frac{5 - 3e}{e}$.

Var.37

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x + 2020$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 0]$. |
| 5p | c) | Demonstrați că ecuația $f(x) = 2025$ nu admite nicio soluție în intervalul $[-1, 1]$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. |
| 5p | a) | Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0, \pi]$. |
| 5p | b) | Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x) dx$. |
| 5p | c) | Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x) dx = 1$. |

Var.38

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | | |
|----|----|---|
| | | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. |
| 5p | a) | Arătați că $f'(x) = 6x(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) | Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 + 2x^2 + x - 2}{x - 1} = 2$. |
| 5p | c) | Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 12x + 2020$. |
| | | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 + 1) - 2$. |
| 5p | a) | Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x + 2) dx = 0$. |
| 5p | b) | Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 2) e^x dx$. |
| 5p | c) | Determinați numărul real pozitiv m , știind că $\int_1^2 f(x) dx = m^2 + 1$. |

Var.39

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 1)(f(x) - x^2) dx = 1$.
- 5p b) Calculați $\int_{-1}^1 x f(x) dx$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$.

Var.40

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-27 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [0, 3]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \in (-\infty, 0) \\ e^x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = e$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Calculați $\int_{-1}^1 x f(x) dx$.

Var.41

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.
- 5p c) Demonstrați că $xe^x \geq e^x - 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x) dx = 6$.
- 5p b) Calculați $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x) dx = 2 \left(\frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$.

Var.42

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.
- 5p c) Demonstrați că $xe^x \geq e^x - 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x) dx = 6$.
- 5p b) Calculați $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x) dx = 2 \left(\frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$.

Var.43

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^{2020} + 1, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
5p	a) Arătați că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.
5p	b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1, +\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$ și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \ln x$.
5p	a) Arătați că $\int_1^2 x f(x) dx = e(e-1)$.
5p	b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$.
5p	c) Demonstrați că $\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = e^e$.

Var.44

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 - 63$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
5p	c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$.
	2. Se consideră funcțiile $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$ și $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.
5p	a) Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f .
5p	b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
5p	c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln \frac{8}{3}$.

Var.45

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x=3$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(2, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)} dx = 1$. |
| 5p | b) Calculați $\int_1^2 f^2(x) dx$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$, pentru orice $a \in [2020, +\infty)$. |

Var.46

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2 \ln x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2020} - 2020x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2020x - 1) dx = \frac{1}{2021}$. |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1, +\infty)$. |
| 5p | c) Calculați $\int_0^1 (f(-x) - f(x)) e^x dx$. |

Var.47

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + (x-1)^2$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = 3$. |
| 5p | c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y = 3x + 1$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x - 2) dx = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1) dx = -2$. |
| 5p | c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă. |

Var.48

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$. |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = 0$. |

- 5p b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = 3$.
- 5p c) Se consideră funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 1$. Demonstrați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}$.

Var.49

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3) + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x+1} = -3$.
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x + e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x - e^x) dx = \frac{2}{5}$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^a f(x) dx = \frac{5a^2 + 54}{10} + e^a$.

Var.50

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 9$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = -9$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \leq 11$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2 + 1) dx = 0$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 (x^2 + 1) e^x f(x) dx$.
- 5p c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx = \ln(2a)$.

