

Geometrie vectorială.

1. PUNCTUL CARE ÎMPARTE UN SEGMENT ÎNTR-UN RAPORT.

Consideră segmentul AB , iar $M \in (AB)$ pentru care $\frac{AM}{MB} = k$, $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, atunci $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$, pentru orice punct O din planul segmentului AB . Grupând termenii, se obține:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}$$

Observații.

- 1) Pentru $k = 1$, se obține vectorul $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ care este mediană în $\triangle OAB$.
- 2) Pentru $\alpha = \frac{1}{1+k}, \beta = \frac{k}{1+k}$, $\alpha, \beta \geq 0$ și $\alpha + \beta = 1$, se obține:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$$

Propoziție.

- 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ implică $ABCD$ paralelogram sau A, B, D, C puncte coliniare.
- 2) $ABCD$ paralelogram implică $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Propoziție.

Doi vectori nenuli $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{v_2} = \alpha\overrightarrow{v_1}$

Propoziție.

Fie vectorii $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ necoliniari. Atunci are loc implicația

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Propoziție.

Fie dreapta AB inclusă în planul P și un punct $M \in P$. Atunci $M \in (AB) \Leftrightarrow (\exists)x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$

Ap.1 Se consideră $\triangle ABC$, G —centrul său de greutate. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

Soluție. Din G —centru de greutate al $\triangle ABC$, atunci $3\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, unde $O \in (ABC)$, de unde $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$. Atunci, din $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$, rezultă că $(a+1)\overrightarrow{GA} + (b+1)\overrightarrow{GB} = \mathbf{0}$.

Cum vectorii $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ nu sunt coliniari, deducem că $a+1 = 0$ și $b+1 = 0$. Deci, $a = b = -1$.

Ap.2 Fie $ABCD$ patrulater oarecare și E, F, G , respectiv H mijloacele laturilor BC, DA, AB , respectiv CD . Să se arate că:

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CA}.$$

Soluție. Fie $\{O\} = EF \cap HG$. Avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} &= (\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG}) = \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Ap.3 Se consideră $ABCD$ patrulater oarecare în care E , respectiv F mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD . Să se arate că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF}.$$

Soluție. Avem:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} \end{cases}$$

Adunând relațiile de mai sus, se obține:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE}) + 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD}).$$

Dar, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = 0$ și $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} = 0$. Atunci,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF}.$$

Ap.4 Fie $AB \perp CD$, AB, CD coarde ale cercului de centru O și $AB \cap CD = \{P\}$. Să se arate că:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Soluție. Au loc relațiile:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} \end{cases}$$

Sumând relațiile de mai sus, se obține:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Fie $M \in (AB), N \in (CD)$ mijloace, atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$, atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2\overrightarrow{OP}$. Deci,

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$$

Ap.5 Fie $ABCD$ un patrulater convex în care M, N mijloacele laturilor AD , respectiv BC . Să se arate că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Soluție. Au loc relațiile:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \end{cases}$$

Adunând, se obține:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM}) + 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC})$$

Dar, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM} = 0$ și $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 0$, atunci:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Ap.6 Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater formează un paralelogram.

Soluție. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$, iar M, N, P , respectiv Q mijloacele laturilor $(AB), (BC), (CD)$, respectiv (DA) .

Arătăm că $MNPQ$ —paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Avem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}; \quad (1)$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}; \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.

Ap.7 Se consideră paralelogramul $ABCD$ de centru O și P un punct în planul său. Să se arate că:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$$

Soluție. Pentru O mijlocul segmentelor AC, BD au loc relațiile:

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}), \quad \overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD})$$

Adunând, se obține: $2\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$$

Ap.8 Se consideră ΔABC , G —centrul de greutate, iar O —centru cercului circumscris ΔABC . Să se arate că:

$$a) \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

$$b) \quad 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Soluție. Fie $M \in (BC)$ cu $BM = MC$. Observând că GM este mediană în $\triangle GBC$, obținem: $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Din G -centru de greutate, avem că $\frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} = 2 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + 2 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$, de unde $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

b) Utilizând relația de mai sus, avem $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Ap.9 Se consideră $\triangle ABC$, iar A', B', C' puncte pe laturile (BC) , (CA) , (AB) pentru care $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = k$. Să se arate că cele două triunghiuri au același centru de greutate.

Soluție. Fie G, G' centre de greutate ale $\triangle ABC$, respectiv $\triangle A'B'C'$, atunci au loc relațiile:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \text{ respectiv } \overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$$

Din $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = k \Rightarrow \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{C'B}$ sau încă:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} &= \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB'} &= \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OC'} &= \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

Utilizând relațiile de mai sus, obținem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OC}\right) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}\right) = \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow G' = G\end{aligned}$$

Ap.10 Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$, astfel încât $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = k$. Să se arate că dreapta MN trece prin centrul de greutate al $\triangle ABC$ dacă și numai dacă $k = 1$.

Soluție. Notăm $\frac{MB}{MA} = a, \frac{NC}{NA} = b$ și obținem:

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{a+1}\overrightarrow{AB} \text{ și } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{b+1} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{a+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b+1}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{a+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{a+1}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Vectorii $\overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{MN}$ au aceeași direcție dacă și numai dacă:

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{a+1}}{-\frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{b+1}} \Leftrightarrow a+b=1 \Leftrightarrow k=1.$$

Ap.11 Se consideră triunghiul ABC și P, Q, T puncte de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB .

Dacă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CT} = \mathbf{0}$, atunci să se arate că ΔABC este echilateral.

Soluție. Notăm $AT = AQ = x$, $BT = BP = y$, $CP = CQ = z$. Avem:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{z\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}{y+z}, \overrightarrow{BQ} = \frac{x\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{BA}}{x+z}, \overrightarrow{CT} = \frac{y\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CB}}{y+x}$$

Din $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CT} = \mathbf{0}$ rezultă:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{y+z} - \frac{z}{x+z}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{y}{y+z} - \frac{y}{x+y}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{x}{x+z} - \frac{x}{x+y}\right)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) &= \mathbf{0} \\ \left(\frac{z}{y+z} - \frac{z}{x+z} - \frac{x}{x+z} + \frac{x}{x+y}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{y}{y+z} - \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+z} - \frac{x}{x+y}\right)\overrightarrow{AC} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ nu sunt coliniari, avem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{z}{y+x} + \frac{x}{x+y} = 1 \\ \frac{y}{y+z} + \frac{x}{x+z} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xz \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{z^2} = \frac{z}{y} \\ z^2 = xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC - \text{echilateral.} \end{aligned}$$

Ap.12 (GM.3-2000) Pe laturile ΔABC se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ și $\frac{MA}{AB} = \alpha$, $\frac{NB}{BC} = \beta$, $\frac{PC}{CA} = \gamma$.

a) Să se arate că centrul de greutate al ΔMNP aparține medianei din A a $\Delta ABC \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$.

b) Să se arate că centrele de greutate al triunghiurilor ABC și MNP coincid dacă și numai dacă $\alpha = \beta = \gamma$.

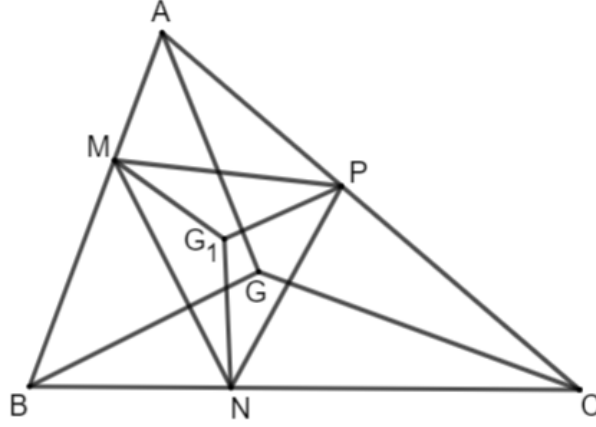
Soluție.

a) Fie G_1 centrul de greutate al ΔMNP și G centrul de greutate al ΔABC . Atunci:

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}}{3} = \frac{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP}}{3}$$

Cum $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$ și $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$, rezultă că:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GG_1} &= \frac{\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{CA}}{3} = \\ &= \frac{\alpha\overrightarrow{AB} + \beta(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \gamma\overrightarrow{CA}}{3} = \\ &= \frac{(\alpha - \beta)\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{AC}}{3} \end{aligned}$$



Cum $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$, atunci din G_1 aparține medianei din $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}$ și $\overrightarrow{GG_1}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\alpha - \beta = \beta - \gamma \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \beta$.

b) $G = G_1 \Leftrightarrow G_1$ aparține medianei din A și medianei din B a triunghiului $ABC \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$ și $2\gamma = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

Ap.13 Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care M este mijlocul laturii (BC) și N mijlocul laturii (CD) . Dreptele AM și BN se intersectează în punctul P astfel încât $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{5}$ și $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$. Să se precizeze natura patrulaterului $ABCD$.

Soluție. Din $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{PM}{AP} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{A} = 4\overrightarrow{PM}$. Din $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; (1).

Din $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{b}$ și cum M este mijlocul segmentului $[BC]$, avem: $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$. Deci, $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

Pe de altă parte, avem $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{NC} = 4\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; (2). Din (1) și (2) se obține: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i.e. $AB \parallel CD$, și cum $[AB] = [CD]$, rezultă că $ABCD$ este paralelogram.

Ap.14 Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O și N să fie coliniare, atunci:

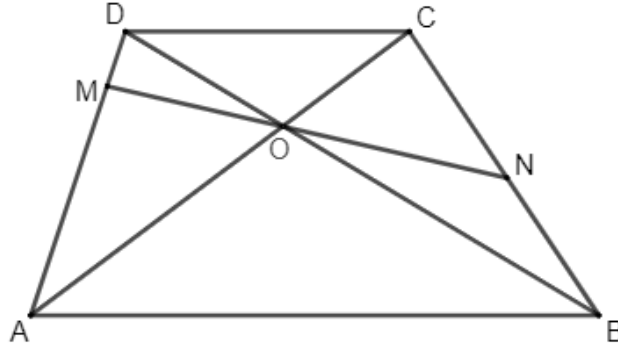
a) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$.

b) Să se demonstreze că: $\frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{NB}{CD} + \frac{MA}{DM} \right)$.

Soluție.

a) Notăm $\frac{AB}{CD} = k$, $\frac{NB}{CN} = q$, $\frac{MA}{DM} = p$.

Cum $\triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \Rightarrow \frac{AO}{CO} = k \Rightarrow \overrightarrow{AO} = -k\overrightarrow{OC}$,



$$\begin{aligned}\frac{BO}{DO} = k &\Rightarrow \vec{OB} = k\vec{OD}. \\ \frac{MA}{DM} = p &\Rightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + p\vec{OD}}{1+p} = \frac{-k\vec{OC} + p\vec{OD}}{1+p} \\ \frac{BN}{CN} = q &\Rightarrow \vec{ON} = \frac{\vec{OB} + q\vec{OC}}{1+q} = \frac{-k\vec{OD} + q\vec{OC}}{1+q}.\end{aligned}$$

b) Cum vectorii $\vec{OM}$ și $\vec{ON}$ sunt coliniari, atunci $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ pentru care $\vec{OM} = \alpha\vec{ON}$, atunci avem:

$$\begin{aligned}-\frac{k}{1+p}\vec{OC} + \frac{p}{1+p}\vec{OD} &= -\alpha \cdot \frac{k}{1+q}\vec{OD} + \alpha \cdot \frac{q}{1+q}\vec{OC} \\ \left(\frac{\alpha q}{1+q} + \frac{k}{1+p}\right)\vec{OC} &+ \left(\frac{-\alpha k}{1+q} - \frac{p}{1+p}\right)\vec{OD} = 0\end{aligned}$$

Dar $\vec{OC}$ și $\vec{OD}$ nu sunt coliniari, atunci
$$\begin{cases} \frac{\alpha q}{1+q} + \frac{k}{1+p} = 0 \\ \frac{-\alpha k}{1+q} - \frac{p}{1+p} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$k^2 = pq \Rightarrow k = \sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} \Rightarrow \frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{NB}{CD} + \frac{MA}{DM} \right)$$

Ap.15 Fie patrulaterul convex $ABCD$ și punctele M, N, P, Q pe laturile $[AB], [BC], [CD],$ și respectiv $[DA]$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = k, k > 0, k \neq \frac{1}{2}$. Atunci $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Soluție. Din $\frac{AM}{AB} = k \Rightarrow \frac{MB}{AB} = 1 - k$ și analoagele.

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MB} + \vec{BN} = (1-k)\vec{AB} + k\vec{BC} \\ \vec{QP} &= \vec{QD} + \vec{DP} = k\vec{AD} + (1-k)\vec{DC} \\ MNPQ - \text{paralelogram} &\Leftrightarrow \\ \vec{MN} = \vec{QP} &\Leftrightarrow (1-k)\vec{AB} + k\vec{BC} = k\vec{AD} + (1-k)\vec{DC} \Leftrightarrow \\ (1-k)(\vec{AB} - \vec{DC}) &= k(\vec{AD} - \vec{BC}) \Leftrightarrow \\ (1-k)(\vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD}) &= k(\vec{AD} + \vec{CB}) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$(1 - k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow (1 - 2k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

Cum $2k - 1 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$ —paralelogram.

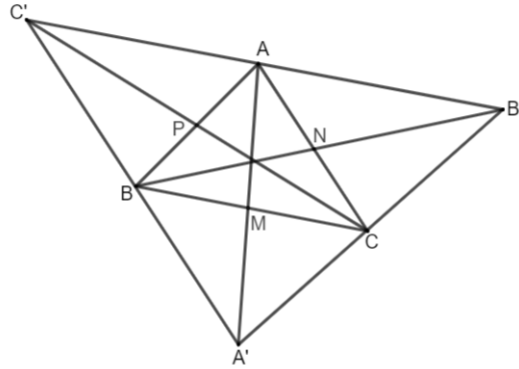
Ap.16 Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P pe laturile $[AB], [BC]$ și respectiv $[AC]$ astfel încât $AM = 2MB, BN = 2NC, CP = 2PA$. În planul triunghiului se consideră punctele D, E, F astfel încât $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = 0$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate.

Soluție. Fie G centrul de greutate al ΔABC , deci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. Dar $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. Deci, G este centrul de greutate al ΔABC .

Din ipoteză $0 = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GE}) + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GF}) = -(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$, de unde G este centrul de greutate al ΔDEF .

Ap.17 Pe laturile BC, CA și AB ale ΔABC se consideră punctele M, N și P . Fie A', B' și C' simetricele punctelor A, B respectiv C față de punctele M, N și P . Arătați că punctele $C \in (A'B'), A \in (B'C')$ și $B \in (A'C')$ dacă și numai dacă $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.

Soluție. Notăm $\frac{BM}{MC} = k, \frac{CN}{NA} = p, \frac{AP}{PB} = q$.



$$\text{Atunci } \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} = \overrightarrow{MA'},$$

$$\frac{BM + MC}{MC} = \frac{k+1}{1} \Rightarrow \frac{BC}{MC} = k+1 \Rightarrow \overrightarrow{MC} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{k+1}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\begin{aligned} \text{Deci, } \overrightarrow{CA'} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA'} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}{k+1} + \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{k+1} = \frac{2\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}}{k+1} = \\ &= \frac{2\overrightarrow{AB} + (k-1)\overrightarrow{AC}}{k+1} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{NB'} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{p+1} \Rightarrow \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC} + \frac{p}{p+1}\overrightarrow{CA}$$

$$\frac{CN}{NA + CN} = \frac{p}{p+1} \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{p}{p+1}$$

$$\overrightarrow{CB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1-p}{p+1}\overrightarrow{CA}$$

$$\text{Dar } C \in (A'B') \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'})\text{-coliniari} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{1+k}}{-1} = \frac{\frac{k-1}{k+1}}{\frac{1-p}{1+p}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{p+1} = \frac{k-1}{p-1} \Leftrightarrow k(p+1) = 3p-1 \Leftrightarrow k = \frac{3k-1}{p+1}$$

$$\text{Analog, } A \in (B'C'), B \in (C'A') \Leftrightarrow q = \frac{3q-1}{q+1}, q = \frac{3k-1}{k+1} \Rightarrow p = \frac{2k-1}{k}, \text{ dar}$$

$$k = \frac{3p-1}{p+1}, \text{ atunci se obține } k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1. \text{ Avem deci,}$$

$$k = p = q = 1 \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}.$$

Ap.18 Fie triunghiul ABC și $E \in (AB), F \in (AC)$ astfel încât $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = k$. Fie M și N mijloacele segmentelor $[EF]$, respectiv $[BC]$. Să se arate că punctele A, M și N sunt coliniare

Soluție. Din M mijlocul segmentului $[EF]$ obținem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$, analog din N mijlocul segmentului $[BC]$, avem $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Pe de altă parte, din $\frac{AE}{AB} = k \Rightarrow \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$ și analog, $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC}$. Atunci:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{AN}$$

Cum $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN}$, deducem că A, M, N coliniare.

Ap.19 Fie paralelogramul $ABCD$, $M \in (AD)$, $[AM] \equiv [MD]$, $N \in (BM)$, $BN = 2NM$. Să se arate că punctele A, N, C sunt coliniare.

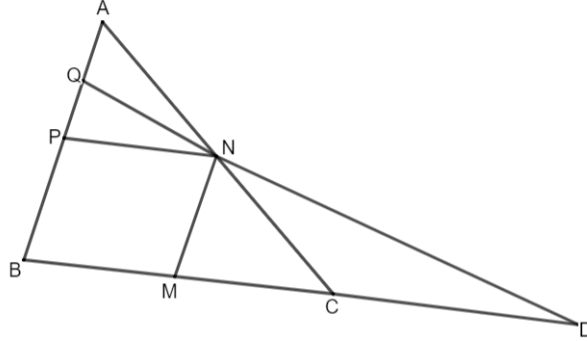
Soluție. Avem $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}) \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} 3\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$$

Deci, punctele A, N și C sunt coliniare.

Ap.20 Fie M, N, P mijloacele laturilor $(BC), (CA)$, respectiv (AB) ale triunghiului ABC , iar Q mijlocul lui (AP) și D simetricul lui M față de punctul C . Să se arate că punctele Q, N și D sunt coliniare.

Soluție.

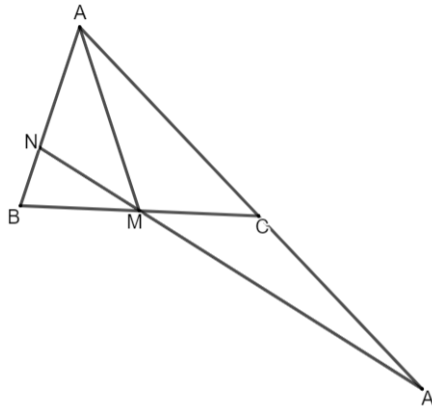


$$\text{Avem } \overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NA}) \Rightarrow 2\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NA}.$$

Pe de altă parte, avem $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{PN} \Rightarrow \overrightarrow{ND} = -\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NP}$, atunci $2\overrightarrow{NQ} = -\overrightarrow{ND}$ adică punctele Q, N , respectiv D sunt coliniare.

Ap.21 Fie $\triangle ABC$, A' simetricul lui A față de C , M mijlocul segmentului $[BC]$ și N un punct astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Arătați că punctele N, M și A' sunt coliniare.

Soluție.

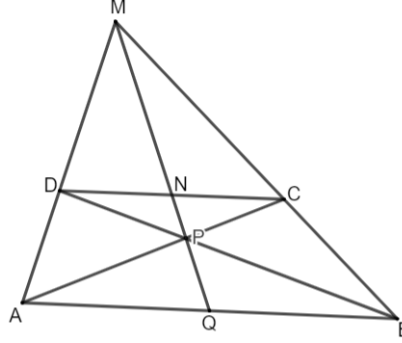


$$\text{Avem } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}.$$

Pe de altă parte, avem: $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA'} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MA'} \Rightarrow M, N$ și A' sunt coliniare.

Ap.22 Să se arate că într-un trapez, punctul de intersecție al laturilor neparalele, mijloacele bazelor și punctul de intersecție al diagonalelor, sunt coliniare.

Soluție.



$$\text{Fie } \frac{MD}{DA} = \frac{MC}{CB} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{CB} \end{cases}.$$

Cum M mijlocul lui $[DC] \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \Rightarrow$ punctele M, N, Q coliniare. Arătăm că N, P, Q sunt coliniare.

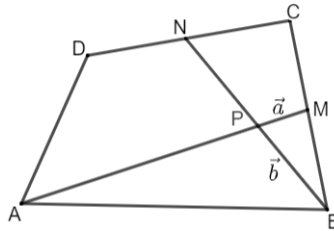
$$\text{Din } DC \parallel AB \Rightarrow \triangle DPC \sim \triangle PAB \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA} = q \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DP} = q\overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{CP} = q\overrightarrow{PA} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{q}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}) = -q\overrightarrow{PQ} \Rightarrow N, P, Q \text{ coliniare.}$$

Deci, M, N, P, Q sunt coliniare.

Ap.23 Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul lui $[BC]$, N mijlocul lui $[CD]$, iar $\{P\} = AM \cap BN$. Dacă $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{5}$ și $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$ să se studieze natura patrulaterului $ABCD$.

Soluție.



$$\text{Notăm } \overrightarrow{PM} = \vec{a}, \overrightarrow{PB} = \vec{b}. \text{ Din } \frac{PM}{AM} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{PM}{AP} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{PB}.$$

$$\text{Din } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 4\vec{a} + \vec{b}; \quad (1).$$

$$\text{Vom calcula } \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}. \text{ Din } \frac{PB}{BN} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{NP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{3}{2}\vec{b}. \text{ Din } M \text{ mijlocul lui } [BC], \text{ avem } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} =$$

$\vec{a} - \vec{b}$. Așadar,

$$\begin{aligned}\vec{NC} &= \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} + \vec{a} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{DC} &= 2\vec{NC} = 4\vec{a} + \vec{b}; \quad (2)\end{aligned}$$

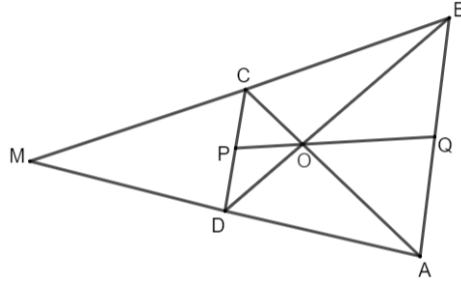
Cum $\vec{AB}$ și $\vec{DC}$ au aceeași direcție și ținând cont de (1) și (2), obținem că $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABCD$ —paralelogram.

Ap.24 Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{M\} = AD \cap BC$, $P \in (DC)$, $Q \in (AB)$ astfel încât $\frac{PD}{PC} = \frac{QB}{QA} = r$.

a) Să se arate că vectorii $\vec{AB}, \vec{CD}$ sunt coliniari dacă și numai dacă vectorii $\vec{OP}, \vec{OQ}$ sunt coliniari.

b) Dacă $r = 1$, atunci vectorii $\vec{AB}, \vec{CD}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\vec{MO}, \vec{MQ}$ sunt coliniari.

Soluție.



Ap.25 Fie $ABCD$ un patrulater și $k > 0$. Punctele M, N, P, Q sunt astfel încât $\vec{AM} = \vec{MB}$, $\vec{BN} = k \cdot \vec{BC}$, $\vec{DP} = \vec{PC}$, $\vec{AQ} = k \cdot \vec{AD}$. Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ .

Soluție.

$$\text{Din } \vec{AQ} = k \cdot \vec{AD} \Rightarrow \vec{AM} + \vec{MQ} = k(\vec{AM} + \vec{MD}) \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{1-k}\vec{MQ} - \frac{k}{1-k}\vec{MD}.$$

$$\text{Pe de altă parte avem: } \vec{MQ} = (1-k)\vec{MA} + k\vec{MD} \text{ și } \vec{MN} = (1-k)\vec{MB} + k\vec{MC}.$$

Fie R mijlocul lui $[NQ]$, atunci:

$$\begin{aligned}\vec{MR} &= \frac{1}{2}(\vec{MQ} + \vec{MN}) = \frac{1}{2}[(1-k)\vec{MA} + k\vec{MD} + (1-k)\vec{MB} + k\vec{MC}] = \\ &= \frac{1}{2}[(\vec{MA} + \vec{MB}) + k(\vec{MD} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MB})] = \frac{k}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}) = k \cdot \vec{MP}\end{aligned}$$

Deci, M, R, P coliniare.

Ap.26 Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ situate în același plan, iar $M \in \{A, B, C\}$, respectiv $N \in \{A', B', C'\}$. Să se arate că dacă $\sum_{cyc} \vec{MN} = 0$,

atunci ΔABC și $\Delta A'B'C'$ au același centru de greutate.

Soluție. Fie G, G' centrele de greutate al ΔABC , respectiv $\Delta A'B'C'$, atunci

$$\begin{cases} 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \\ 3\vec{OG'} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S = \sum_{cyc} \vec{MN} &= \vec{AA'} + \vec{AB'} + \vec{AC'} + \vec{BA'} + \vec{BB'} + \vec{BC'} + \vec{CA'} + \vec{CB'} + \vec{CC'} = \\ &= 3(\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO}) + 3(\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'}) = 3 \cdot \frac{1}{3}\vec{GO} + 3 \cdot \frac{1}{3}\vec{OG'} = \vec{GG'} \end{aligned}$$

Dacă $S = 0 \Rightarrow G = G'$.

Ap.27 Fie M, N mijloacele laturilor BC , respectiv CD ale paralelogramului $ABCD$, $\{P\} = AM \cap BN$. Să se arate că: $\frac{PM}{AM} + 2 \cdot \frac{BP}{BN} = 1$.

Soluție. Fie $\frac{PM}{AM} = a$, $\frac{BP}{BN} = b$ și O un punct din planul paralelogramului $ABCD$, avem:

$$\begin{cases} \vec{PM} = a \cdot \vec{AM} \\ \vec{BP} = b \cdot \vec{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{OP} = (1-a)\vec{OM} + a \cdot \vec{OA} \\ \vec{OP} = (1-b)\vec{OB} + b \cdot \vec{ON} \end{cases}$$

Din $ABCD$ paralelogram obținem $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$, de unde

$$\begin{cases} \vec{OP} = a \cdot \vec{OA} + \frac{1-a}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) \\ \vec{OP} = (1-b)\vec{OB} + \frac{b}{2}(\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OC}) \end{cases}$$

de unde, identificând, se obține $\begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ \frac{1-a}{2} = 1-b - \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 1$.

Ap.28 Se consideră triunghiul echilateral ABC , iar M un punct interior. Fie D, E, F proiecțiile punctului M pe laturile BC, CA , respectiv AB .

a) Să se arate că $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = \frac{3}{2}\vec{MO}$, unde O este centrul cercului circumscris ΔABC .

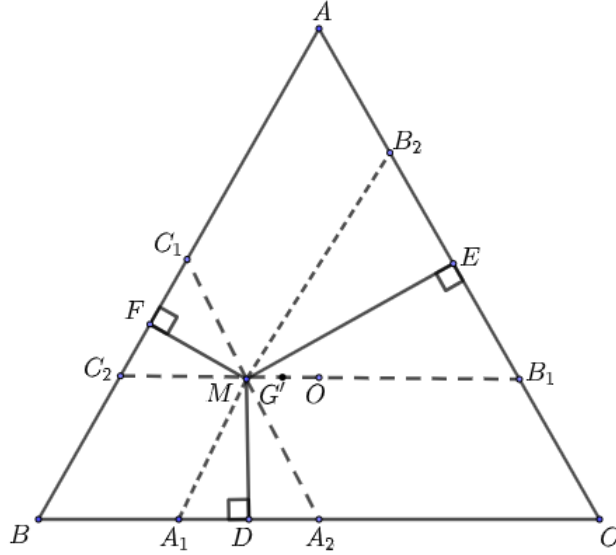
b) Dacă G' centrul de greutate al triunghiului DEF , să se arate că punctele M, O, G' sunt coliniare.

Soluție.

a) Construim $\begin{cases} MA_1 \parallel AB \\ MA_2 \parallel AC \end{cases}$, $\begin{cases} MB_1 \parallel BC \\ MB_2 \parallel AB \end{cases}$, $\begin{cases} MC_1 \parallel AC \\ MC_2 \parallel BC \end{cases}$. Cum $\begin{cases} \Delta MA_1A_2 \text{ echilateral} \\ MD \perp A_1A_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$MD = \frac{1}{2}(\vec{MA_1} + \vec{MA_2}) \text{ și analog, } \begin{cases} \vec{ME} = \frac{1}{2}(\vec{MB_1} + \vec{MB_2}) \\ \vec{MF} = \frac{1}{2}(\vec{MC_1} + \vec{MC_2}) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} &= \frac{1}{2}(\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \vec{MB_1} + \vec{MB_2} + \vec{MC_1} + \vec{MC_2}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = \frac{1}{2}(\vec{MO} + \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC}) = \end{aligned}$$



$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}, \text{ unde } \overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

b) Din $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow O, M, G$ coliniare.

Ap.29 Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM} = -n \cdot \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{n}\overrightarrow{PA}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă E, F, Q sunt mijloacele laturilor $[MP]$, $[MN]$, $[NP]$ ale ΔMNP , arătați că ΔEFQ și ΔABC au același centru de greutate.

Soluție. Din ipoteză obținem: $\overrightarrow{BM} = -n \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$ și analog, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC}$, respectiv $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CA}$. Fie O un punct din planul ΔABC , atunci:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OB} + \frac{n}{n+1}\overrightarrow{OB} + \\ &+ \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OC} + \frac{n}{n+1}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

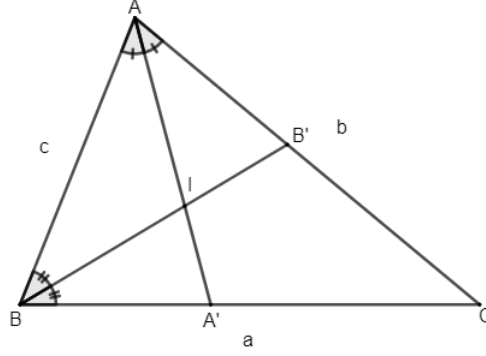
Dacă G_1 este centrul de greutate al ΔEFQ și G al triunghiului ABC , atunci

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OG}$$

Deci, $G = G_1$.

2. VECTORUL DE POZIȚIE AL CENTRULUI CERCULUI ÎNSCRIS ÎNTR-UN TRIUNGHI.

Fie ΔABC cu laturile de lungimi $BC = a, CA = b, AB = c$, și AD bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, iar $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, respectiv $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$



a) Conform teoremei bisectoarei interioare, avem $\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}$, de unde $\overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A'A} + \frac{c}{b} \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$.

Deci, $\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{c} + c\overrightarrow{b}}{b+c}$.

b) Aplicând teorema bisectoarei în $\triangle BAA'$, se obține $\frac{AI}{IA'} = \frac{BA}{A'B}$, dar din $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$ rezultă că $BA' = \frac{ac}{b+c}$, atunci $\frac{AI}{IA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}}$ sau $\overrightarrow{IA'} = \frac{a}{b+c} \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AA'} = \frac{a}{b+c} \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$.

Fie O un punct din planul $\triangle ABC$, atunci din $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$ se obține:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} &= \frac{b(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + c(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})}{a+b+c} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{OI} &= \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \end{aligned}$$

Ap.1 Se consideră triunghiul ABC în care AA' este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, iar AM mediană. Să se arate că $AA' = AM$ dacă și numai dacă triunghiul este isoscel în A .

Soluție. Din AM mediană în $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; (1).

Din AA' -bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$; (2).

" $\Rightarrow$ " $\triangle ABC$ isoscel $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{b}{2b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{2b}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$

" $\Leftarrow$ " $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{2(b+c)}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{2(b+c)}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AB} \text{ și } \overrightarrow{AC} &\text{ nu sunt coliniari} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = c.$$

Ap.2 Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 3, AC = 1, BC = 2$, iar AA' bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, AM mediană. Să se arate că $\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Soluție. În $\triangle ABC$: $AB = 3, BC = 2, CA = 1$: AA' –bisectoare

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \text{ iar } AM \text{ mediană, } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \text{ atunci:}$$

$$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Ap.3 Se consideră triunghiul ABC în care $[AA'), A' \in (BC), [BB'), B' \in (CA), [CC'), C' \in (AB)$ sunt bisectoare interioare. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, atunci triunghiul este echilateral.

Soluție. Cum AA' –bisectoare interioară, atunci $\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ și analoagele:

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}, \overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b}. \text{ Avem:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} + \frac{c\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{BA}}{c+a} + \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b} = \\ &= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{b}{b+a}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{a+c} - \frac{b}{b+a}\right)\overrightarrow{CB} = 0 \end{aligned}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$, respectiv $\overrightarrow{CA}$ nu sunt coliniari, rezultă:

$$\begin{cases} \frac{b}{b+c} = \frac{a}{a+b} \\ \frac{c}{b+c} = \frac{b}{b+a} \\ \frac{c}{a+c} = \frac{b}{b+a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \triangle ABC - \text{echilateral}.$$

Ap.4 Se consideră triunghiul ABC în care $[AA'), A' \in (BC), [BB'), B' \in (CA), [CC'), C' \in (AB)$ sunt bisectoare interioare concurente în punctul I .

a) Arătați că dacă $\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} = 6$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

b) Arătați că dacă $\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} = 8$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Fie $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Teorema bisectoarei în $\triangle ABC$ implică: $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BA' = \frac{ac}{b+c}$.

Analog, $B'C = \frac{ab}{a+c}$, respectiv $C'A = \frac{bc}{a+b}$.

Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiurile $\triangle ABA'$, $\triangle BCB'$, $\triangle CAC'$ și obținem:

$$6 = \frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} = \frac{BA}{BA'} + \frac{CB}{CB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{c+b}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = 6$$

Cum $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, rezultă că relația de egalitate are loc pentru $a = b = c \Rightarrow \triangle ABC$ echilateral.

$$b) \frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} = 8 \Leftrightarrow \frac{c+b}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{b+a}{c} = 8 \Leftrightarrow$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc \Leftrightarrow a = b = c, \text{ ținând cont că } a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ și analoagele.}$$

Ap.5 Se consideră $\triangle ABC$, AM —mediană, AA' —bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, iar S —simetricul punctului M față de punctul A' . Să se arate că:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3b-c}{2(b+c)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3c-b}{2(b+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Soluție. Cum AM —mediană în $\triangle ABC$, atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Din teorema bisectoarei pentru AA' , avem $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}$, obținem

$$\overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b}\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \frac{c}{b}\overrightarrow{A'A} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}.$$

Din S —simetricul punctului M față de A' , rezultă $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = \frac{2b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{2c}{b+c}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{3b-c}{2(b+c)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3c-b}{2(b+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Ap.6 Se consideră triunghiul ABC în care O este centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate. Să se arate

că: $\overrightarrow{IG} = \frac{(6s-a)\overrightarrow{OA} + (6s-b)\overrightarrow{OB} + (6s-c)\overrightarrow{OC}}{2s}$, unde s reprezintă semiperimetrul triunghiului.

Soluție. Din relațiile

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \end{cases} \text{ și } \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OI} \text{ se obține:}$$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{(2a+3b+3c)\overrightarrow{OA} + (3a+2b+3c)\overrightarrow{OB} + (3a+3b+2c)\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{(6s-a)\overrightarrow{OA} + (6s-b)\overrightarrow{OB} + (6s-c)\overrightarrow{OC}}{2s}$$

Ap.6 Se consideră triunghiul ABC în care AA' este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, iar M , respectiv N mijloacele segmentelor $[BA']$, respectiv $[A'C]$. Să se arate că: $\overrightarrow{AP} = \frac{(3b+c)\overrightarrow{AB} + (b+3c)\overrightarrow{AC}}{4(b+c)}$, unde P este mijlocul lui $[MN]$.

Soluție. Avem:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} \\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{(2b+c)\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{2(b+c)} \\ \overrightarrow{AN} = \frac{b\overrightarrow{AB} + (b+2c)\overrightarrow{AC}}{2(b+c)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{(2b+c)\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{2(b+c)} + \frac{b\overrightarrow{AB} + (b+2c)\overrightarrow{AC}}{2(b+c)} \\ &= \frac{(3b+c)\overrightarrow{AB} + (b+3c)\overrightarrow{AC}}{4(b+c)} \end{aligned}$$

Ap.7 Se consideră triunghiul ABC în care AA' este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, iar M , respectiv N astfel încât $\frac{AM}{MA'} = \frac{CN}{NA'} = k, k \neq -1$. Să se arate că: $\overrightarrow{AP} = \frac{[(2k+1)b+c]\overrightarrow{AB} + [b+(2k+1)c]\overrightarrow{AC}}{2(k+1)(b+c)}$, unde P este mijlocul lui $[MN]$.

Soluție. Din $\frac{AM}{MA'} = \frac{CN}{NA'} = k, k \neq -1$ se obțin relațiile:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MA'} \\ \overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{NA'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+k)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AA'} \\ (1+k)\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + k \cdot \overrightarrow{AA'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+k)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k \cdot \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} \\ (1+k)\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + k \cdot \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{[(2k+1)b+c]\overrightarrow{AB} + [b+(2k+1)c]\overrightarrow{AC}}{2(k+1)(b+c)}$$

Ap.8 Fie D, E, F punctele de contact ale bisectoarelor triunghiului ABC cu laturile BC, CA, AB . Să se arate că $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FB}$ dacă și numai dacă ΔABC este echilateral.

Soluție.

Din AD bisectoare avem: $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{BC}{b+c} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BD} = \frac{a}{a+c} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{DC} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{BC} \end{cases}$.

$$\text{Din } BE \text{ bisectoare avem: } \frac{AE}{c} = \frac{EC}{a} = \frac{AC}{c+a} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = \frac{c}{c+a} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{EC} = \frac{a}{c+a} \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\text{Din } CF \text{ bisectoare avem: } \frac{AF}{b} = \frac{FB}{a} = \frac{AB}{b+a} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AF} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{FB} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+c} \overrightarrow{CA} = \\ &= \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{a}{a+c} \overrightarrow{CA} = \\ &= \left(\frac{b}{a+b} - \frac{c}{b+c} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{a}{a+c} \right) \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FB} = \frac{c}{c+a} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{b+c} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{c}{c+a} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{b+c} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB} = \\ &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{c}{c+a} \right) \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Din $S_1 = S_2 \Rightarrow a = b = c$.

Ap.9 Prin mijlocul E al bisectoarei AD a ΔABC se duce o dreaptă care intersectează laturile AB, AC în M , respectiv N . Să se arate că:

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{NA} = 2 \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right)$$

Soluție. Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$, de unde

$$\begin{cases} BD = \frac{ac}{b+c} \\ DC = \frac{ab}{b+c} \end{cases} \text{ și } \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b} \overrightarrow{AC}}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}.$$

Fie $\frac{AM}{AB} = k$ și $\frac{AN}{AC} = p$, atunci:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = -k \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b+c} = \\ &= \left(\frac{b}{2(b+c)} - k \right) \overrightarrow{AB} + \frac{c}{2(b+c)} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -k \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MN}$ nu sunt coliniari, obținem $\frac{\frac{b}{2(b+c)} - k}{-k} = \frac{\frac{c}{2(b+c)}}{p} \Leftrightarrow 2(b+c) =$

$$\frac{b}{k} + \frac{c}{p} \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{kc} + \frac{1}{pb} \Leftrightarrow \frac{1}{MA} + \frac{1}{NA} = 2 \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right).$$

Ap.10 Se consideră triunghiul ABC în care I este centrul cercului înscris, iar G centrul său de greutate.

a) Să se arate că pentru orice punct M din planul triunghiului ABC , are loc relația:

$$(a + b + c)\overrightarrow{MI} = a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC}$$

b) Să se arate că $IG \parallel AC$ dacă și numai dacă $2b = a + c$.

Soluție. a) Dacă AD este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, atunci

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b + c}$$

Din BI bisectoare interioară în $\triangle ABD$, avem $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{b + c}{a + b + c}$, de unde

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b + c}{a + b + c} \overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a + b + c}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{a + b + c} - \overrightarrow{AM} = \\ &= \frac{b(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + c(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})}{a + b + c} - \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{MI} &= \frac{a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC}}{a + b + c} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GI} &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) = \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{=0} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}) \\ &= \overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}) \\ \overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = \left(\frac{b}{a + b + c} - \frac{1}{3}\right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{a + b + c} - \frac{1}{3}\right) \overrightarrow{AC} = \\ &= \frac{2b - a - c}{3(a + b + c)} \overrightarrow{AB} + \frac{2c - a - b}{a + b + c} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

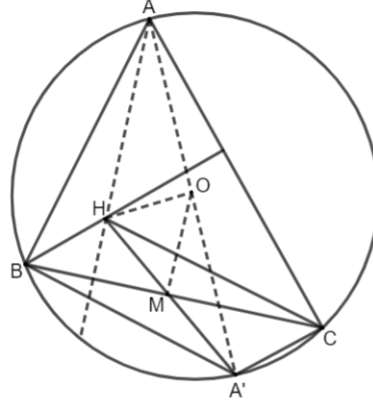
Așadar, $IG \parallel AC \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2b - a - c = 0 \Leftrightarrow 2b = a + c$.

3. ORTOCENTRUL UNUI TRIUNGHI. CONCURENȚA ÎNĂLȚIMILOR.

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC , H ortocentrul triunghiului, iar A' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris acestui triunghi.

Fie $OM \perp BC$, atunci M este mijlocul segmentului $[BC]$. În triunghiul HAA' , $[OM]$ este linie mijlocie, deoarece OM este diametrul perpendicular pe o coardă și $AH \perp BC$, $[AH]$ înălțime în $\triangle ABC$, iar O este mijlocul lui $[AA']$. Rezultă că M este mijlocul lui $[HA']$.

Cum M este și mijlocul lui $[BC]$ se obține că $BHCA'$ este paralelogram.



Din HO mediană în $\triangle HAA' \Rightarrow 2\vec{HO} = \vec{HA} + \vec{HA'}$, dar $\vec{HA'} = \vec{HB} + \vec{HC}$ din $BHCA'$ paralelogram. Deci,

$$2\vec{HO} = \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} \text{ (prima relație Sylvester)}$$

Folosind cele de mai sus, deducem că OM este mediană în $\triangle OBC$, atunci $2\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{OC}$, adică $2\vec{OM} = \vec{AM}$ din faptul că $[OM]$ linie mijlocie în $\triangle HAA'$ și $\vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OH}$. Așadar,

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OA} + 2\vec{OM} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \text{ (adoua relație Sylvester)}$$

Ap.1 Fie $\triangle ABC$ ascuțitunghic înscris în cercul de centru O și rază R , iar P și Q simetricele ortocentrului și vârfului A față de mijlocul laturii BC .

a) Arătați că P este diametral opus lui A în cercul $C(O, R)$.

b) Demonstrați că $\vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OP}$.

Soluție. a) Fie A' diametral opus lui A , atunci $BHCA'$ este paralelogram, de unde A' este simetricul lui H față de mijlocul lui $[BC]$, adică $P = A'$.

b) Dacă M este mijlocul lui $[BC]$, avem $2\vec{OP} = \vec{PQ} \Rightarrow$

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OP} + 2\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Ap.2 Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC , respectiv BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD , respectiv ABC , să se arate că $\vec{DH_1} = \vec{BH_2}$.

Soluție. Din relația lui Sylvester în $\triangle ACD$: $\vec{OH_1} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}$, iar în $\triangle ABC$, $\vec{OH_2} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, atunci:

$$\begin{aligned} \vec{OH_1} &= \vec{OH_2} - \vec{OB} + \vec{OD} \Rightarrow \vec{OH_1} - \vec{OH_2} = \vec{OD} - \vec{OB} \\ \vec{H_1H_2} &= \vec{DB} \Rightarrow \vec{H_1B} + \vec{BH_2} = \vec{DH_1} + \vec{H_1B} \Rightarrow \vec{BH_2} = \vec{DH_1}. \end{aligned}$$

Ap.3 Să se arate că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

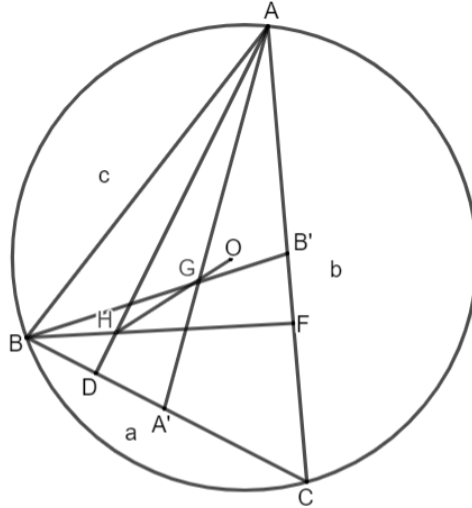
Soluție. Fie ΔABC , $\{H\} = AA' \cap BB'$, iar O centrul cercului circumscris ΔABC , atunci are loc relația lui Sylvester $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$.

Presupunând că $\{H'\} = AA' \cap CC'$, analog obținem $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH'}$. Rezultă că $\vec{OH} = \vec{OH'}$, adică $H = H'$, prin urmare înălțimile (AA') , (BB') , (CC') sunt concurente în punctul H .

Ap.4 În triunghiul oarecare ABC punctele H, G, O sunt ortocentrul, centrul de greutate, respectiv centrul cercului circumscris ΔABC . Să se arate că punctele H, G, O sunt coliniare (dreapta care conține aceste puncte se numește *dreapta lui Euler*).

Soluție. Din relația lui Sylvester avem $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$; (1).

Pe de altă parte avem relația $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ pentru orice punct M din planul ΔABC . Punând $M = O$, se obține: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$; (2)



Din (1) și (2) se obține $\vec{OH} = 3\vec{OG} \Rightarrow \vec{OH}$ și $\vec{OG}$ sunt coliniari, adică punctele O, H și G sunt coliniare.

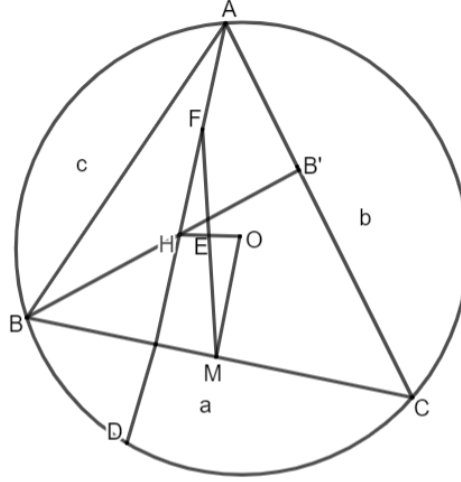
Ap.5 Într-un triunghi ABC picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor ce unesc ortocentrul cu vârfurile triunghiului sunt situate pe același cerc (numit *cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte*).

Soluție. Fie H ortocentrul ΔABC , M proiecția lui O pe dreapta BC , F mijlocul segmentului $[AH]$ și R raza cercului circumscris. Arătăm că cercul care conține cele nouă puncte are centrul în punctul F .

Avem $EF = \frac{OA}{2} \Rightarrow EF = \frac{R}{2}$, (EF – linie mijlocie în ΔAHO).

Cum M mijlocul lui $[BC] \Rightarrow \vec{EM} = \frac{1}{2}(\vec{EB} + \vec{EC})$.

Dar, utilizând relația lui Sylvester, avem: $\vec{EB} = \vec{OB} - \vec{OE} = \vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OH} =$



$$\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

În mod analog, se obține: $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

$$\text{Deci, } \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Rightarrow EM = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$

Așadar, punctele F și M sunt pe cercul de centru E și rază $\frac{R}{2}$. De asemenea D , piciorul înălțimii din A , aparține aceluiași cerc fiind vârful triunghiului dreptunghic FDM cu diametrul $[FM]$.

Ap.6 Se consideră hexagonul $ABCDEF$ și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, DEF, FAE . Arătați că pentru orice puncte M, N, P, Q din plan care satisfac relația $\overrightarrow{H_1M} + \overrightarrow{H_3P} = \overrightarrow{H_2N} + \overrightarrow{H_4Q}$, $MNPQ$ este paralelogram.

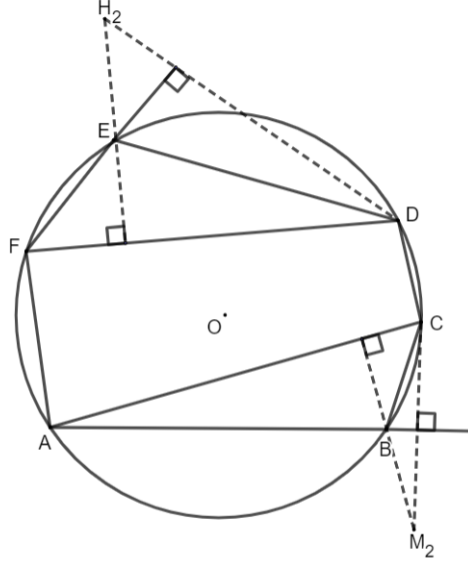
Soluție. Din relația lui Sylvester avem: $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$, O fiind centrul cercului circumscris hexagonului $ABCDEF$.

Arătăm că $H_1H_2H_3H_4$ este hexagon, astfel $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{H_3H_4} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{AD}$, de unde $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_3H_4}$ ceea ce înseamnă că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram, atunci pentru orice punct S din plan, are loc relația $\overrightarrow{SH_1} + \overrightarrow{SH_3} = \overrightarrow{SH_2} + \overrightarrow{SH_4}$.

Avem $\overrightarrow{H_1M} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SH_1}$, $\overrightarrow{H_2N} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SH_2}$, $\overrightarrow{H_3P} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SH_3}$, $\overrightarrow{H_4Q} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SH_4}$, de unde cu relația de mai sus obținem: $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SQ}$, deci $MNPQ$ este paralelogram.

Ap.7 Se consideră $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil și $H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3$ ortocentrele triunghiurilor CDE, DEF, EFA, FAB, ABC , respectiv BCD . Demonstrați că H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3 sunt concurente.

Soluție. Folosind relația lui Sylvester, avem $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$, respectiv



$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, atunci:

$$\overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}.$$

Analog, se obține:

$$\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}.$$

Deci, $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OM_2}$, de unde $\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \Rightarrow \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$ adică $H_1H_2M_1M_2$ este paralelogram, iar diagonalele H_1M_1 și H_2M_2 se înjumătățesc. Prin același punct va trece și H_3M_3 , căci $H_1H_3M_1M_3$ este paralelogram.

Ap.8 Se consideră triunghiul ABC în care I centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris, iar H ortocentrul triunghiului. Să se arate

că: $\overrightarrow{IH} = \frac{(2s-a)\overrightarrow{OA} + (2s-b)\overrightarrow{OB} + (2s-c)\overrightarrow{OC}}{2s}.$

Soluție. Din relația lui Sylvester avem: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, iar

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}, \text{ atunci obținem:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IH} &= \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} = \\ &= \frac{(2s-a)\overrightarrow{OA} + (2s-b)\overrightarrow{OB} + (2s-c)\overrightarrow{OC}}{2s}. \end{aligned}$$

Ap.9 Se consideră triunghiul ABC în care H, G, O ortocentru, centrul de greutate, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului.

Pe semidreptele $[OA), [OB), [OC)$ se consideră punctele D, E, F astfel încât $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = 4$, iar pe segmentele DB, EC, AF se iau

punctele M, N și P astfel încât $\frac{DM}{MB} = \frac{EN}{NC} = \frac{FP}{PA} = 2$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei HG .

Soluție. Din $\frac{DM}{MB} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DM} = 2 \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{Analog, } \begin{cases} \frac{EN}{NC} = 2 \\ \frac{FP}{PA} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 2(3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 6\overrightarrow{OG}, \text{ unde } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Fie G_1 centrul de greutate al ΔMNP , atunci $3\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$, de unde $3\overrightarrow{OG_1} = 6\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = 2\overrightarrow{OG} \Rightarrow O, G, G_1$ coliniare și cum punctele H, O, G sunt coliniare, rezultă că $G_1 \in (HG)$.

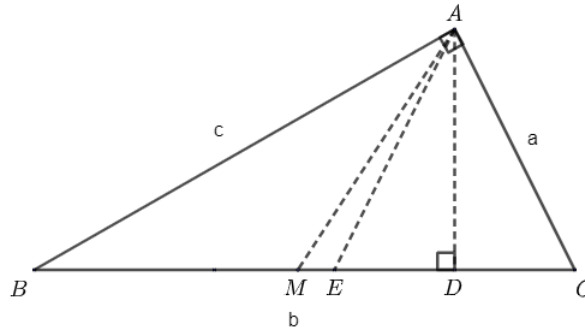
Observație. Problema se poate generaliza punând $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = k, k > 2$ și $\frac{DM}{MB} = \frac{EN}{NC} = \frac{FP}{PA} = k - 2$.

Ap.10 În triunghiul dreptunghic ABC , D, E, M sunt piciorul înălțimii, bisectoarei, respectiv mediane duse din A . Să se arate că:

$$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] \overrightarrow{AM}$$

Soluție. Din AE bisectoare rezultă $\frac{BE}{BA} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{c} = \frac{EC}{b} = \frac{a}{b+c}$, de unde

$$\begin{cases} EC = \frac{ab}{b+c} \\ BE = \frac{ac}{b+c} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \overrightarrow{EC} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BE} = \frac{c}{b+c} \overrightarrow{BC} \end{cases}$$



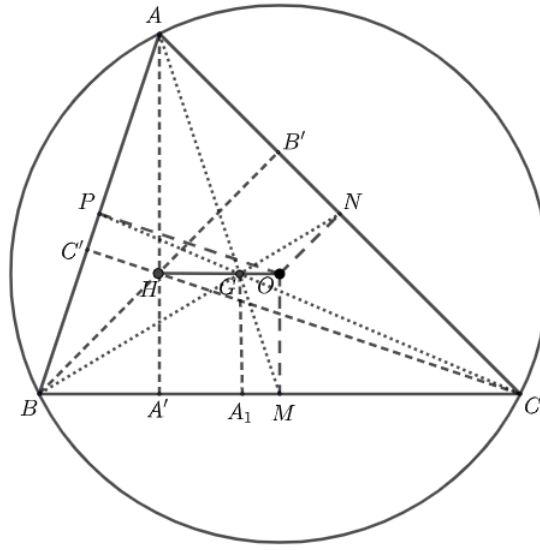
$$\overrightarrow{AE} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \frac{AM \cdot \overrightarrow{AD} + AD \cdot \overrightarrow{AM}}{AM + AD} = \frac{\frac{a}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{bc}{a}\overrightarrow{AM}}{\frac{a}{2} + \frac{bc}{a}} = \\
&= \frac{a^2\overrightarrow{AD} + 2bc\overrightarrow{AM}}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 + 2bc}\overrightarrow{AD} + \frac{2bc}{a^2 + 2bc}\overrightarrow{AM} \stackrel{T.Pitagora}{=} \\
&= \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM}
\end{aligned}$$

Ap.11 În triunghiul ABC , punctele G, H, O sunt centrul de greutate, ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris. Să se arate că:

$$a^2 \cdot \overrightarrow{GA_1} + b^2 \cdot \overrightarrow{GB_1} + c^2 \cdot \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$$

Soluție. Considerăm $AA'' \perp BC, BA' = m, A'C = n, BB' \perp AC, CB' = p, B'A = q$



respectiv $CC' \perp AB, AC' = r, C'B = s$. Cum $GA_1 \perp BC \Rightarrow GA_1 \parallel AA'$ avem:

$$\Delta MGA_1 \sim \Delta MAA', \text{ de unde } \frac{MG}{MA} = \frac{MA_1}{MA'} = \frac{GA_1}{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}.$$

$$\text{Din } \Delta AA'C \sim \Delta BB'C \Rightarrow \frac{A'C}{B'C} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{n}{p} = \frac{b}{a} \Rightarrow an - bp = 0 \text{ și analoagele.}$$

$$\begin{aligned} \text{Din } \frac{BA'}{A'C} = \frac{m}{n} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} &= \frac{m}{n} \overrightarrow{A'C} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \frac{m}{n} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{m}{n} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \\ (m+n) \overrightarrow{AA'} &= n \overrightarrow{AB} + m \overrightarrow{AC} \text{ de unde } \overrightarrow{AA'} = \frac{n}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{m}{a} \overrightarrow{AC} \text{ Atunci:} \end{aligned}$$

$$a^2 \cdot \overrightarrow{GA_1} = \frac{a^2}{3} \overrightarrow{AA'} = \frac{a}{3} (n \overrightarrow{AB} + m \overrightarrow{AC})$$

$$\begin{aligned}
a^2 \cdot \overrightarrow{GA_1} + b^2 \cdot \overrightarrow{GB_1} + c^2 \cdot \overrightarrow{GC_1} &= \frac{a}{3} (n \overrightarrow{AB} + m \overrightarrow{AC}) + \frac{b}{3} (p \overrightarrow{BA} + q \overrightarrow{BC}) + \frac{c}{3} (r \overrightarrow{CA} + s \overrightarrow{CB}) \\
&= \frac{1}{3} [(an - bp) \overrightarrow{AB} + (am - rc) \overrightarrow{AC} + (bq - cs) \overrightarrow{BC}] = \vec{0}
\end{aligned}$$

Ap.12 În triunghiul ABC cu laturile a, b, c , punctele I, G sunt centrul cercului înscris, respectiv centrul de greutate. Să se arate că $IG \parallel BC$ dacă și numai dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Pentru orice punct din planul $\triangle ABC$ are loc relația: $\vec{OI} = \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{a + b + c}$.
Luând G în loc de O , se obține:

$$\begin{aligned} (a + b + c)\vec{GI} &= a \cdot \vec{GA} + b \cdot \vec{GB} + c \cdot \vec{GC} = \frac{2a}{3} \cdot \vec{A'A} + \frac{2b}{3} \cdot \vec{B'B} + \frac{2c}{3} \cdot \vec{C'C} = \\ &= -\frac{2}{3}(a \cdot \vec{AA'} + b \cdot \vec{BB'} + c \cdot \vec{CC'}) = \\ &= -\frac{1}{3}[a(\vec{AB} + \vec{BC}) + b(\vec{BA} + \vec{BC}) + c(\vec{CA} + \vec{CB})] = \\ &= -\frac{1}{3}[(a - b)\vec{AB} + (b - c)\vec{BC} + (a - c)\vec{AC}] = \\ &= \frac{1}{3}[(2a - b - c)\vec{AB} + (b + a - 2c)\vec{AC}] \end{aligned}$$

Așadar, $IG \parallel BC \Leftrightarrow (\vec{IG}, \vec{BC})$ au aceeași direcție $\Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow 2b = a + c$.

Ap.13 În triunghiul ABC , O, H, G sunt centrul cercului circumscris, ortocentrul, respectiv centrul de greutate. Să se arate că:

- a) $\vec{AH}, \vec{OM}$ sunt coliniari.
- b) $\vec{AH} + \vec{BH} + \vec{CH} = 6\vec{OG}$
- c) $|\vec{AH} + \vec{BH} + \vec{CH}| < 6R$.

Soluție. a) Cum $\triangle OBC$ este isoscel în O , avem $OM \perp BC$ și sum $A' \in BC, AA' \perp BC$ rezultă că $AH \parallel OM$.

$\begin{cases} \widehat{BHA''} \equiv \widehat{BCA''} \\ \widehat{A''HC} \equiv \widehat{A''BC} \end{cases} \Rightarrow A'BHC - \text{paralelogram, atunci } M \text{ mijlocul lui } A''H \text{ și cum}$

$OM \parallel AH \Rightarrow OM - \text{linie mijlocie în } \triangle A''AH \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$ și $2\vec{OM} = \vec{AH} \Rightarrow (\vec{OM}, \vec{AH})$ sunt coliniari.

b) Avem relațiile: $\begin{cases} \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \\ 3 \cdot \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \end{cases}$, de unde se obține:

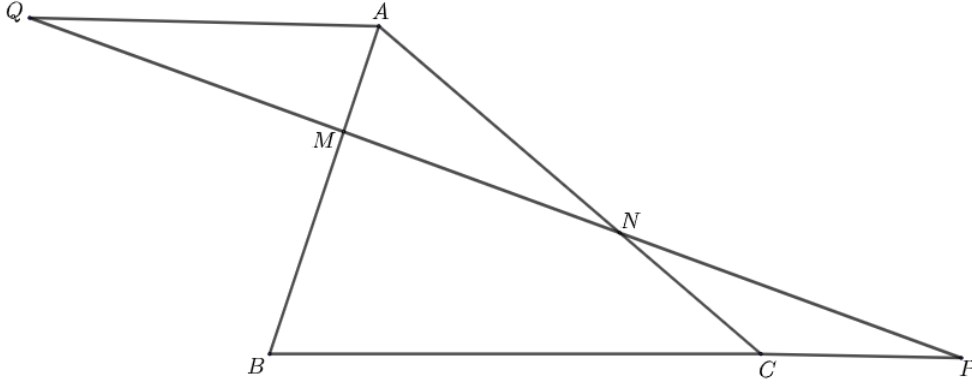
$$\begin{aligned} \vec{AH} + \vec{BH} + \vec{CH} &= \vec{AO} + \vec{OH} + \vec{BO} + \vec{OH} + \vec{CO} + \vec{OH} + \vec{OH} = \\ &= (\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO}) + 3\vec{OH} = 6 \cdot \vec{OG} \end{aligned}$$

c) Din cele de mai sus, obținem: $|\vec{AH} + \vec{BH} + \vec{CH}| \leq |6 \cdot \vec{OG}| = 6R$, unde $|OG| < R$.

Ap.14 Se consideră triunghiul ABC în care AA' este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, iar AM mediana dusă din A , I centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris triunghiului. Să se arate că:

Soluție.

Sintetic: Ducem prin A o paralelă la BC , fie Q punctul de intersecție cu dreapta MN . Din $\triangle AMQ \sim \triangle BMP \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AQ}{BP}$, iar din $\triangle AQN \sim \triangle NCP \Rightarrow$



$$\frac{NC}{NA} = \frac{PC}{AQ}, \text{ de unde } \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AQ}{BP} \cdot \frac{PC}{AQ} \text{ adică } \frac{AM}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Reciproc. Fie $\frac{AM}{MB} = x, \frac{CN}{NA} = y, \frac{PB}{PC} = \frac{1}{xy}$, unde $x, y \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Atunci:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{1+x} \overrightarrow{PA} + \frac{x}{1+x} \overrightarrow{PB}; \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = xy \overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{1+y} \overrightarrow{PC} + \frac{y}{1+y} \overrightarrow{PA}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PN} &= \frac{1}{1+y} \overrightarrow{PC} + \frac{y}{1+y} \overrightarrow{PA} = \frac{y}{1+y} \overrightarrow{PA} + \frac{1}{1+y} \cdot xy \overrightarrow{PB} = \\ &= \frac{y}{1+y} \overrightarrow{PA} + \frac{xy}{1+y} \overrightarrow{PB} \end{aligned}$$

Punctele M, N, P sunt coliniare, atunci $(\exists) k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{PM} = k \cdot \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow$
 $\frac{y}{1+y} \cdot \frac{x+1}{1} = \frac{xy}{1+y} \cdot \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow \frac{y(x+1)}{y+1} = \frac{y(x+1)}{y+1}.$

Așadar, dacă $M \in AB, N \in AC, P \in BC$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$

atunci punctele M, N, P sunt coliniare. (*reciproca teoremei lui Menelaus*).